P74

HENRI POINCARÉ

BIBLIOTECA DE FILOSOFIE
FILOSOFIA UNIVERSALĂ CONTEMPORANĂ
BIBLIOTECA DE FILOSOFIE

181.132

Știință și metodă

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ

BIBLIOTECA DE FILOSOFIE
Filosofia universală contemporană

HENRI POINCARÉ

Ştiinţă şi metodă

Traducere din limba franceză
de VASILE TONOIU

181.132

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
Bucureşti 1998

Lucrare apărută cu sprijinul Ministerului Cercetării şi Tehnologici

© Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1998

ISBN 973-44-0248-X

Introducere

Reunesc aici diverse studii care se referă mai mult sau mai puţin direct la probleme de metodologie a ştiinţei. Metoda ştiinţifică se compune din observaţie şi experimentare. Dacă savantul ar avea la dispoziţie un timp infinit, n-am avea decât să-i spunem : „priveşte şi priveşte bine". Cum însă nu are timp să privească totul şi mai ales să privească totul bine, şi cum e de preferat să nu privească decât să privească prost, e necesar să facă o alegere. Prima problemă este aşadar aceea de a şti cum trebuie să efectueze alegerea. Această problemă se pune fizicianului ca şi istoricului ; ea se pune în egală măsură matematicianului, şi principiile care trebuie să-i călăuzească sunt asemănătoare. Savantul li se conformează instinctiv. Reflectând asupra acestor principii, se poate prezice viitorul posibil al matematicii.

Ne-am da seama şi mai bine de acest lucru observând munca efectivă a savantului. Trebuie să cunoaştem, în primul rând, mecanismul psihologic al invenţiei şi, în special, mecanismul invenţiei matematice. Observarea procedeelor de lucru ale matematicianului este deosebit de instructivă pentru psiholog.

În toate ştiinţele de observaţie trebuie să ţinem seamă de erorile datorate imperfecţiunii simţurilor şi instrumentelor noastre. Din fericire, se poate admite că, în anumite condiţii, aceste erori se compensează în parte, astfel încât dispar din valorile medii. Această compensare se datorează hazardului. Dar ce este hazardul ? Ca noţiune este greu de justificat şi chiar de definit. Şi totuşi, ceea ce spuneam în legătură cu erorile de observaţie arată că savantul nu se poate lipsi de ea. Încât e necesar să dăm o definiţie pe cât posibil precisă a acestei noţiuni atât de utile şi atât de greu de fixat.

Acestea sunt generalităţi care se aplică în definitiv tuturor ştiinţelor. Mecanismul invenţiei matematice, de pildă, nu diferă mult de mecanismul invenţiei în general. Voi aborda apoi unele probleme care se referă cu deosebire la anumite ştiinţe speciale şi mai întâi la matematicile pure.

Sunt obligat, în capitolele consacrate lor, să tratez subiecte ceva mai abstracte. Trebuie mai întâi să vorbesc despre noţiunea de spaţiu. Toată lumea ştie că spaţiul este relativ, sau mai curând toată lumea o spune, dar mulţi mai gândesc ca şi cum l-ar considera absolut ; e de ajuns totuşi să reflectăm puţin pentru a ne da seama la ce contradicţii se expun.

Problemele de învăţământ îşi au importanţa lor, mai întâi pentru ele însele şi apoi pentru că a reflecta la cea mai bună modalitate de a introduce noţiuni noi în creierele virgine înseamnă în acelaşi timp să reflectezi asupra modului în care aceste noţiuni au fost dobândite de predecesorii noştri şi, în consecinţă, asupra adevăratei lor origini, adică, în fond, asupra adevăratei lor naturi. De ce copiii nu înţeleg nimic, cel mai adesea, din definiţiile care îi satisfac pe savanţi ? De ce trebuie să le oferim alte definiţii ? Aceasta este problema pe care mi-o pun în capitolul următor şi a cărei soluţie ar putea sugera, cred, reflecţii folositoare filosofilor interesaţi de logica ştiinţelor.

Pe de altă parte, mulţi geometri cred că matematicile pot fi reduse la regulile logicii formale. Au fost depuse, în acest sens, eforturi extraordinare ; pentru a reuşi, s-a recurs, fără nici o teamă, la răsturnarea ordinii istorice a formării conceptelor noastre şi s-a încercat să se explice finitul prin infinit. Cred că am izbutit, pentru toţi cei ce abordează problema fără prejudecăţi, să arăt că există aici o iluzie cu totul înşelătoare. Sper că cititorul va înţelege importanţa chestiunii şi-mi va ierta ariditatea paginilor pe care a trebuit să i le consacru.

Ultimele capitole referitoare la mecanică şi astronomie vor fi mai uşor de citit.

Mecanica pare a fi pe cale de a suferi o revoluţie completă. Noţiunile care păreau cel mai bine întemeiate sunt distruse de novatori îndrăzneţi. Ar fi desigur prematur să le dăm dreptate de pe acum, doar pentru că sunt novatori. Dar nu e lipsit de interes

să facem cunoscute teoriile lor. E ceea ce am şi încercat. Dat fiind că noile idei păreau uluitoare dacă nu se vedea cum au putut lua naştere, am urmat pe cât posibil ordinea istorică.

Astronomia ne oferă spectacole grandioase şi ridică probleme uriaşe. Nici vorbă să le aplicăm direct metoda experimentală. Laboratoarele noastre sunt prea mici. Dar analogia cu fenomenele accesibile acestor laboratoare poate totuşi călăuzi astronomia. Calea Lactee, de exemplu, este un ansamblu de sori ale căror mişcări par la început capricioase. Dar nu putem oare compara acest ansamblu cu cel al moleculelor unui gaz ale cărui proprietăţi ne-au devenit cunoscute graţie teoriei cinetice a gazelor ? Metoda fizicianului poate veni astfel, pe o cale ocolită, în sprijinul astronomului.

În sfârşit, am dorit să fac în câteva rânduri istoria dezvoltării geodeziei franceze. Am arătat cu preţul câtor eforturi perseverente şi adesea cu ce riscuri ne-au procurat geodezii cele câteva noţiuni, de care dispunem, despre figura Pământului. E şi aceasta o problemă de metodă ? Da, fără îndoială, această istorie ne arată, într-adevăr, de câte precauţiuni trebuie să se însoţească o operaţie ştiinţifică serioasă, de cât timp şi efort e nevoie pentru a cuceri o zecimală nouă.

CARTEA ÎNTÂI

Savantul şi ştiinţa

CAPITOLUL I

Alegerea faptelor

Tolstoi explică undeva de ce „ştiinţa pentru ştiinţă" este în vederile lui o concepţie absurdă. Nu putem cunoaşte *toate* faptele, pentru că numărul lor este practic infinit. Trebuie să alegem. În consecinţă, putem regla oare această alegere după simplul capriciu al curiozităţii ? N-ar fi mai bine să ne lăsăm călăuziţi de utilitate, de nevoile noastre practice şi mai ales morale ? N-avem ceva mai bun de făcut decât să stabilim numărul buburuzelor care există pe planeta noastră ?

E clar că termenul de utilitate nu are pentru el sensul pe care i-l atribuie oamenii de afaceri şi, dincolo de ei, majoritatea contemporanilor noştri. Puţin îi pasă lui de explicaţiile din industrie, de minunăţiile electricităţii sau automobilismului, pe care le consideră mai curând ca obstacole în calea progresului moral ; utilul este doar ceea ce îl poate face pe om mai bun.

În ce mă priveşte — mai e nevoie s-o spun ? — nu m-aş mulţumi nici cu un ideal, nici cu celălalt. N-aş accepta nici o plutocraţie lacomă şi mărginită, nici o democraţie virtuoasă şi mediocră, preocupată doar să întindă obrazul stâng, şi în care ar trăi : înţelepţi lipsiţi de curiozitate care, evitând excesele, nu ar muri de boală, ci cu siguranţă de plictiseală. Aceasta este însă o chestiune de gust şi nu despre aşa ceva vreau să discut.

Problema rămâne totuşi întreagă şi trebuie să ne reţină atenţia. Dacă alegerea noastră nu poate fi determinată decât de capriciu sau de utilitatea imediată, nu poate exista ştiinţă pentru ştiinţă şi, în consecinţă, nu poate exista ştiinţă. Aşa să fie ? Incontestabil, o alegere trebuie făcută. Oricare ar fi activitatea noastră, faptele ne-o iau înainte, şi nu le putem ajunge din urmă. În timp ce savantul

descoperă un fapt, miliarde de miliarde de fapte se produc într-un milimetru cub din organismul său. A vrea să incluzi natura în ştiinţă ar însemna să vrei ca întregul să intre în parte.

Savanţii cred însă că există o ierarhie a faptelor şi că între ele se poate face o alegere judicioasă. Ei au dreptate, pentru că fără alegere n-ar exista ştiinţă şi pentru că ştiinţa există. E suficient să deschizi ochii pentru a vedea că realizările industriei care i-au îmbogăţit pe atâţia oameni practici nu ar fi fost posibile dacă ar fi existat doar aceşti oameni practici, şi dacă ei n-ar fi fost devansaţi de acei nebuni dezinteresaţi care au murit săraci, care nu se gândeau niciodată la utilitate şi care totuşi aveau o altă călăuză decât capriciul lor.

Aceşti nebuni, cum a spus Mach, au economisit pentru urmaşii lor efortul de gândire. Cei care ar fi lucrat doar în vederea unei aplicaţii imediate n-ar fi lăsat nimic după ei şi, în faţa unei necesităţi noi, ar fi trebuit să se reia totul de la capăt. Or, celor mai mulţi oameni nu le place să gândească, şi poate că e bine aşa, pentru că instinctul îi călăuzeşte — şi cel mai adesea mai bine decât ar călăuzi raţiunea o inteligenţă pură — cel puţin ori de câte ori urmăresc un scop imediat şi mereu acelaşi. Dar instinctul este tot una cu rutina şi, dacă nu l-ar fecunda gândirea, el n-ar progresa în cazul omului mai mult decât la albină sau la furnică. Trebuie deci să se gândească pentru cei cărora nu le place să gândească şi, cum aceştia sunt numeroşi, trebuie ca fiecare din gândurile noastre să fie util cât se poate de frecvent. Tocmai de aceea o lege va fi cu atât mai valoroasă cu cât va fi mai generală.

Aceasta ne arată cum trebuie făcută alegerea. Faptele cele mai interesante sunt acelea care pot servi de mai multe ori, acelea care au şansa de a se reînnoi. Am avut fericirea să ne naştem într-o lume în care există asemenea fapte. Să presupunem că în loc de 60 de elemente chimice am avea 60 de miliarde, şi că nu ar fi unele comune şi altele rare, ci uniform distribuite. Atunci, ori de câte ori am culege o nouă pietricică, ar exista o mare probabilitate ca ea să fie formată dintr-o substanţă necunoscută. Tot ce am şti despre celelalte pietricele n-ar avea nici o valoare pentru ea. În faţa fiecărui obiect nou am fi precum copilul abia venit pe lume. Ca şi acesta, n-am putea decât să ne supunem capriciilor sau nevoilor noastre.

Într-o asemenea lume n-ar exista ştiinţă. Poate că gândirea şi chiar viaţa ar fi aici imposibile, pentru că evoluţia n-ar fi putut dezvolta instinctele necesare conservării. Slavă Domnului, lucrurile nu stau aşa. Ca toate lucrurile cu care ne-am obişnuit, nici aceasta nu e apreciată la valoarea ei. Biologul ar fi la fel de stânjenit dacă ar exista doar indivizi, nu şi specie, şi dacă ereditatea n-ar face ca progenitura să semene cu părinţii.

Care sunt deci faptele care au şansa de a se reînnoi ? Sunt mai întâi faptele simple. E clar că într-un fapt complex, mii de împrejurări sunt reunite graţie hazardului şi că doar un hazard şi mai puţin verosimil le-ar putea reuni din nou. Dar există fapte simple şi, dacă da, cum să le recunoaştem ? Cine ne spune că ceea ce considerăm noi a fi simplu nu acoperă o teribilă complexitate ? Tot ce putem spune este că trebuie să preferăm faptele care par simple acelora în care ochiul nostru grosier discerne elemente diferite. Şi atunci, din două una : ori această simplitate este reală, ori elementele sunt atât de intim amestecate încât nu le putem deosebi. În primul caz, avem şansa de a întâlni din nou acelaşi fapt simplu, fie în toată puritatea lui, fie intrând el însuşi ca element într-un ansamblu complex. În al doilea caz, acest amestec lăuntric are deopotrivă mai multe şanse de a se reproduce decât o asamblare eterogenă. Hazardul ştie să reunească, nu şi să separe, şi pentru a face cu elemente multiple un edificiu bine organizat în care se distinge ceva, trebuie s-o facă în mod expres. Există aşadar puţine şanse ca o asamblare în care se distinge ceva să se reproducă vreodată. Dimpotrivă, există multe şanse ca un amestec ce pare omogen la prima vedere să se reînnoiască de mai multe ori. Faptele care par simple, chiar dacă nu sunt aşa, vor fi deci mult mai uşor restabilite graţie hazardului.

E ceea ce îndreptăţeşte metoda adoptată instinctiv de către savant. Şi ceea ce o îndreptăţeşte poate şi mai mult ţine de aceea că faptele frecvente ni se par simple, tocmai pentru că ne-am obişnuit cu ele.

Dar unde există faptul simplu ? Savanţii l-au căutat la cele două extremităţi, în infinitul mare şi în infinitul mic. Astronomul l-a găsit pentru că distanţele dintre aştri sunt uriaşe, atât de mari, încât fiecare astru apare doar ca un punct ; atât de mari, încât diferenţele

calitative se şterg şi pentru că un punct e mai simplu decât un corp care are o formă şi calităţi. Fizicianul, dimpotrivă, a căutat fenomenul elementar decupând fictiv corpurile în cuburi infinit mici, întrucât condiţiile problemei, care suferă variaţii lente şi continue când se trece de la un punct al corpului la altul, ar putea fi considerate constante în interiorul fiecăruia dintre aceste cuburi mici. La fel biologul a ajuns instinctiv să considere celula ca mai interesantă decât animalul întreg, şi rezultatele i-au dat dreptate, pentru că celulele, aparţinând celor mai diverse organisme, sunt mai asemănătoare între ele, pentru cel ce ştie să recunoască asemănările lor, decât înseşi aceste organisme. Sociologul e mult mai încurcat. Elementele — adică, pentru el, oamenii — sunt prea deosebite între ele, prea variabile, prea capricioase, într-un cuvânt prea complexe. De asemenea, istoria nu se repetă. Cum să alegi atunci faptul interesant care este acela ce se repetă ? Metoda constă tocmai în alegerea faptelor. Trebuie deci să ne preocupe mai întâi gândul de a imagina o metodă, şi au fost imaginate multe, pentru că nici una nu se impunea. Fiecare teză de sociologie propune o nouă metodă pe care de altminteri noul doctor se fereşte s-o aplice, astfel că sociologia este ştiinţa care posedă cele mai multe metode şi cele mai puţine rezultate.

Trebuie început, aşadar, cu faptele regulate. Dar, în timp ce regula e bine stabilită şi sigură, faptele care i se conformează deplin se dovedesc îndată a fi lipsite de interes, pentru că nu ne mai învaţă nimic nou. Excepţia devine atunci importantă. Nu vor mai fi căutate asemănările şi se va acorda întâietate diferenţelor. Vor fi alese cu precădere diferenţele cele mai accentuate, nu doar pentru că ele ar fi cele mai izbitoare, ci pentru că vor fi cele mai instructive. Un exemplu simplu va face să se înţeleagă mai bine gândul meu. Presupun că vrem să determinăm o curbă observând câteva din punctele ei. Practicianul care nu s-ar preocupa decât de utilitatea imediată ar observa numai punctele de care ar avea nevoie pentru un anumit obiect special. Aceste puncte s-ar distribui neregulat pe curbă : ar fi aglomerate în unele regiuni, rare în altele, încât ar fi imposibil să le legăm printr-o linie continuă şi ar fi inutilizabile pentru alte aplicaţii. Altfel va proceda savantul. El vrea să studieze curba pentru ea însăşi. De aceea, va distribui regulat

punctele care trebuie observate şi, o dată cunoscute unele dintre ele, le va uni printr-o linie regulată şi va obţine întreaga curbă. Dar ce va face pentru aceasta ? Dacă a determinat un punct extrem al curbei, nu va rămâne prea aproape de această extremitate, ci va fixa mai întâi celălalt capăt. După cele două extremităţi, punctul cel mai instructiv va fi cel din mijloc, şi aşa mai departe.

Astfel, atunci când o regulă e stabilită, ceea ce trebuie să căutăm în primul rând sunt cazurile în care acea regulă are cele mai multe şanse de a fi infirmată. De unde, între alte motive, interesul pentru faptele astronomice, pentru trecutul geologic. Mergând foarte departe în spaţiu, sau foarte departe în timp, putem găsi regulile noastre obişnuite complet bulversate. Şi aceste mari bulversări ne vor ajuta să vedem mai bine sau să înţelegem mai bine micile schimbări care se pot produce mai aproape de noi, în micul colţ de lume unde suntem hărăziţi să trăim şi să acţionăm. Vom cunoaşte mai bine acest colţ fiindcă am călătorit în locurile depărtate unde nu aveam nimic de făcut.

Dar ceea ce trebuie să urmărim nu rezidă atât în constatarea asemănărilor şi diferenţelor, cât în regăsirea similitudinilor ascunse sub divergenţele aparente. Regulile particulare par la început discordante. Privind însă mai de aproape, vedem în general că ele se aseamănă. Diferite prin materia lor, ele se apropie prin forma, prin ordinea părţilor lor. Atunci când le vom considera sub acest unghi, vom observa că se lărgesc şi tind să cuprindă totul. E tocmai ceea ce constituie valoarea unor fapte care vin să completeze un ansamblu şi să arate că el este imaginea fidelă a altor ansambluri cunoscute.

Nu pot să insist mai mult, dar aceste câteva cuvinte sunt suficiente pentru a arăta că savantul nu alege la întâmplare faptele pe care trebuie să le observe. El nu numără buburuze, cum zice Tolstoi, pentru că numărul acestor animale, oricât ar fi ele de interesante, e supus unor variaţii capricioase. El caută să condenseze într-un volum mic multă experienţă şi multă gândire, şi de aceea un opuscul de fizică conţine numeroase experienţe trecute şi de o mie de ori mai multe experienţe posibile al căror rezultat îl cunoaştem dinainte.

Dar n-am considerat până acum decât o latură a problemei. Savantul nu studiază natura pentru că acest lucru este util. El o studiază pentru că îi face plăcere şi îi face plăcere pentru că natura e frumoasă ; dacă n-ar fi frumoasă, n-ar merita efortul de a o cunoaşte, viaţa n-ar merita efortul de a fi trăită. Bineînţeles, nu vorbesc aici de acea frumuseţe care impresionează simţurile, de frumuseţea calităţilor şi aparenţelor. Nu că aş disprețui-o, departe de mine aşa ceva, dar ea n-are nimic de-a face cu ştiinţa. Vreau să vorbesc de acea frumuseţe mai intimă care vine de la ordinea armonioasă a părţilor, şi pe care o poate sesiza o inteligenţă pură. Ea e cea care conferă un corp, un schelet, ca să zicem aşa, aparenţelor sclipitoare care ne răsfaţă simţurile, şi fără acest suport frumuseţea viselor fugitive nu ar fi decât imperfectă, pentru că ar fi nedefinită şi mereu trecătoare. Dimpotrivă, frumuseţea intelectuală îşi ajunge sieşi, şi tocmai pentru ea, mai mult poate decât pentru binele viitor al omenirii, savantul se condamnă la munci îndelungate şi grele.

Aşadar, căutarea acestei frumuseţi speciale, simţul armoniei lumii ne fac să alegem faptele cele mai în măsură să contribuie la această armonie, aşa cum artistul alege, printre trăsăturile modelului său, pe acelea care completează portretul, îi dau caracter şi viaţă. Şi nu trebuie să ne temem că această preocupare instinctivă şi nemărturisită îl abate pe savant de la cercetarea adevărului. Putem visa o lume armonioasă, pe care lumea reală o va lăsa foarte departe înapoia ei. Cei mai mari artişti care au existat vreodată, grecii, şi-au construit un cer. El e meschin pe lângă adevăratul cer al nostru.

Şi pentru că simplitatea, şi măreţia sunt frumoase, vom cerceta cu precădere faptele simple şi faptele grandioase, ne va face plăcere când vom urmări cursa gigantică a aştrilor, când vom scruta cu microscopul prodigioasa micime care este şi o măreţie, când vom căuta în timpurile geologice urmele unui trecut care ne atrage pentru că este îndepărtat.

Se vede că preocuparea pentru frumos ne conduce la aceleaşi alegeri ca şi preocuparea pentru util. Se vede astfel deopotrivă că economia de gândire, economia de efort, care, după Mach, este tendinţa constantă a ştiinţei, constituie o sursă de frumuseţe şi

totodată un avantaj practic. Edificiile pe care le admirăm sunt cele în care arhitectul a ştiut să adapteze mijloacele la scop şi în care coloanele par a susţine fără efort şi sprinten greutatea ce le-a fost impusă, asemenea cariatidelor graţioase ale Erechteion-ului.

De unde vine această concordanţă ? Pur şi simplu din aceea că lucrurile care ni se par frumoase sunt cele care se adaptează cel mai bine la inteligenţa noastră şi că deci ele sunt în acelaşi timp instrumentul pe care această inteligenţă ştie cel mai bine să-l reînnoiască ? Sau este aici un joc al evoluţiei şi selecţiei naturale ? Oare popoarele al căror ideal era cel mai conform cu interesul lor bine înţeles le-au exterminat pe celelalte şi le-au luat locul ? Şi unele şi altele îşi urmau idealul lor, fără să-şi dea seama de consecinţe, dar în vreme ce această căutare le ducea pe unele la pierzanie, altora le dădea autoritate. Am fi înclinaţi să credem acest lucru. Dacă grecii au triumfat asupra barbarilor şi dacă Europa, moştenitoarea gândirii grecilor, domină lumea, este pentru că sălbaticilor le plăceau culorile ţipătoare şi sunetele zgomotoase ale tobei care nu interesau decât simţurile lor, în timp ce grecii iubeau frumuseţea intelectuală care se ascunde sub frumuseţea sensibilă, ceea ce face ca inteligenţa să fie sigură şi puternică.

Fără îndoială, un asemenea triumf l-ar îngrozi pe Tolstoi, şi el n-ar recunoaşte că poate fi un adevăr util. Dar această cercetare dezinteresată a adevărului pentru propria lui frumuseţe este şi sănătoasă şi îl poate face pe un om mai bun. Ştiu bine că există decepţii, că gânditorul nu dobândeşte totdeauna din această cercetare seninătatea pe care ar trebui s-o găsească. Ştiu chiar că există savanţi care au un foarte rău caracter.

Am fi îndreptăţiţi atunci să spunem că trebuie să abandonăm ştiinţa şi să nu studiem decât morala ?

Credeţi cumva că moraliştii înşişi sunt ireproşabili după ce coboară de la tribună ?

CAPITOLUL II

Viitorul matematicilor

Pentru a prevedea viitorul matematicilor, adevărata metodă ·onstă în a studia istoria şi starea lor prezentă.

Nu avem aici de-a face, pentru noi, matematicienii, cu un pro-·edeu oarecum profesional ? Noi suntem obişnuiţi să *extrapolăm*, :eea ce constituie un mijloc de a deduce viitorul din trecut şi prezent, şi cum îi ştim bine valoarea, nu riscăm să ne facem iluzii asupra semnificaţiei rezultatelor pe care ni le oferă.

Au existat pe vremuri profeţi cobitori, care repetau cu plăcere că toate problemele susceptibile de a fi rezolvate fuseseră deja rezolvate şi că, după ei, n-am mai avea decât să strângem recolta. Din fericire, exemplul trecutului ne linişteşte. S-a crezut de multe ori că au fost rezolvate toate problemele sau, cel puţin, că s-a făcut inventarul celor care comportă o soluţie. Şi apoi sensul cuvântului soluţie s-a lărgit, problemele insolubile au devenit cele mai interesante dintre toate şi s-au pus alte probleme la care nici nu se visase. Pentru greci, o bună soluţie era aceea care nu întrebuinţează decât rigla şi compasul. Apoi, buna soluţie a fost cea obţinută prin extragerea de radical ; apoi aceea în care nu figurează decât funcţii algebrice sau logaritmice. Pesimiştii erau astfel mereu depăşiţi, mereu obligaţi să dea înapoi, încât cred că în prezent nu mai există.

Nu intenţionez deci să-i combat pentru că aparţin trecutului. Ştim bine că matematicile vor continua să se dezvolte, dar trebuie ştiut în ce sens. Mi se va răspunde „în toate sensurile", ceea ce în parte este adevărat. Dar dacă ar fi întru totul adevărat, răspunsul ar deveni puţin îngrijorător. Bogăţiile noastre n-ar întârzia să devină împovărătoare şi acumularea lor ar produce o harababură la fel de impenetrabilă cum ar fi pentru ignorant adevărul necunoscut.

Istoricul, fizicianul însuşi trebuie să aleagă între fapte. Creierul savantului, care nu este decât un colţ de univers, nu ar putea conţine niciodată întregul univers ; încât printre nenumăratele fapte pe care ni le oferă natura, unele vor fi neglijate şi altele vor fi reţinute. La fel stau lucrurile, *a fortiori*, în matematici. Nici matematicianul nu poate reţine talmeş-balmeş toate faptele care i se prezintă. Cu atât mai mult cu cât chiar el, aş zice capriciul său, le creează. El e cel care construieşte integral o combinaţie nouă apropiind elementele ei. În general nu natura e cea care i-o aduce gata făcută.

Fără îndoială, se întâmplă uneori ca matematicianul să abordeze o problemă pentru a răspunde unei nevoi a fizicii ; ca fizicianul sau inginerul să-i ceară să calculeze un număr în vederea unei aplicaţii. S-ar zice oare că noi, geometrii, trebuie doar să aşteptăm comenzile şi, în loc să ne cultivăm ştiinţa pentru plăcerea noastră, n-am avea decât să ne adaptăm la gustul clientelei ? Dacă matematicile n-au alt scop decât să vină în ajutorul cercetătorilor naturii, de la aceştia din urmă trebuie aşteptat cuvântul la ordine. Este oare legitim acest mod de a vedea ? Cu siguranţă, nu. Dacă n-am fi cultivat ştiinţele exacte pentru ele însele, n-am fi creat instrumentul matematic şi în momentul în care ne-ar fi parvenit cuvântul de ordine al fizicianului, am fi fost rezervaţi.

Nici fizicienii nu aşteaptă, pentru a studia un fenomen, ca vreo nevoie urgentă a vieţii materiale să fi devenit o necesitate a lor. Şi pe bună dreptate. Dacă savanţii din secolul al XVIII-lea ar fi abandonat electricitatea pentru că n-ar fi fost în ochii lor decât o curiozitate lipsită de interes practic, nu am avea în secolul al XX-lea nici telegrafie, nici electrochimie, nici electrotehnică. Obligaţi să aleagă, fizicienii nu s-au călăuzit deci, în alegerea lor, doar după utilitate. Aşadar, cum aleg ei între faptele naturale ? Am explicat-o în capitolul precedent. Faptele care-i interesează sunt cele care pot conduce la descoperirea unei legi, adică cele analoage cu multe alte fapte care nu ne apar ca izolate, ci strict grupate cu altele. Faptul izolat impresionează ochii tuturor, pe-ai omului de rând ca şi pe cei ai savantului. Dar numai adevăratul fizician ştie să vadă legătura care uneşte mai multe fapte a căror analogie e profundă, dar ascunsă. Anecdota cu mărul lui Newton nu este probabil

adevărată, dar e simbolică. Să vorbim aşadar despre ea ca şi cum ar fi adevărată. Ei bine, trebuie să credem că înaintea lui Newton mulţi oameni văzuseră mere căzând : nimeni n-a ştiut să tragă de aici vreo concluzie. Faptele ar fi sterile dacă n-ar exista spirite capabile să aleagă între ele, deosebindu-le pe acelea în spatele cărora se ascunde ceva şi să recunoască ce anume se ascunde ; spirite care, sub faptul brut, vor simţi sufletul faptului.

În matematici facem absolut acelaşi lucru. Din elementele variate de care dispunem putem obţine milioane de combinaţii diferite; dar una dintre aceste combinaţii, câtă vreme e izolată, nu are nici o valoare. Ne-am chinuit adesea mult ca s-o construim, dar asta nu foloseşte absolut la nimic, decât poate ca exerciţiu în învăţământul secundar. De o cu totul altă natură este cazul în care această combinaţie se inserează într-o clasă de combinaţii analoage şi când vom fi remarcat această analogie. Nu ne-am mai afla atunci în prezenţa unui fapt, ci a unei legi. Şi, în acel moment, adevăratul inventator n-ar mai fi muncitorul care va fi construit cu răbdare unele dintre aceste combinaţii. Ar fi cel care va fi pus în evidenţă înrudirea lor. Primul va fi văzut doar faptul brut ; numai celălalt va fi simţit sufletul faptului. Adesea, pentru a afirma această înrudire, îi va fi fost suficient să inventeze un cuvânt nou. Şi acest cuvânt va fi fost creator. Istoria ştiinţei ne-ar oferi o mulţime de exemple familiare tuturor.

Celebrul filosof vienez Mach a spus că rodul ştiinţei constă în a produce economia de gândire, la fel cum maşina produce economia de efort. Şi afirmaţia lui este foarte justă. Sălbaticul calculează cu degetele sale sau punând laolaltă pietricele. Învăţându-i pe copii tabla înmulţirii, noi îi scutim pentru mai târziu de nenumărate manevre cu pietricele. Cineva a recunoscut odinioară, cu ajutorul pietricelelor sau altfel, că 6 ori 7 fac 42 şi a avut ideea să noteze rezultatul. De aceea noi nu avem nevoie să o luăm de la capăt. Acela nu şi-a pierdut timpul, chiar dacă ar fi calculat doar pentru plăcerea lui. Operaţia nu i-a luat decât două minute, ea ar fi cerut, în total două miliarde, dacă un miliard de oameni ar fi trebuit s-o refacă după el.

Importanţa unui fapt se măsoară deci după randamentul lui, adică după cantitatea de gândire pe care ne permite s-o economisim.

În fizică, faptele de mare randament sunt acelea care intră într-o lege foarte generală, pentru că permit să prevedem un foarte mare număr de alte fapte. Nu altfel stau lucrurile în matematici. Eu m-am consacrat unui calcul complicat şi am ajuns cu greu la un rezultat. Nu voi fi răsplătit pentru efortul meu dacă prin aceasta nu am devenit capabil să prevăd rezultatele altor calcule analoage şi să le orientez pe o cale sigură evitând tatonările la care ar fi trebuit să mă resemnez prima dată. Dimpotrivă, nu-mi voi fi pierdut timpul dacă înseşi aceste tatonări au sfârşit prin a-mi revela analogia profundă a problemei pe care tocmai am tratat-o cu o clasă mult mai largă de alte probleme ; dacă ele mi-au arătat în acelaşi timp asemănările şi diferenţele, dacă, într-un cuvânt, m-au făcut să întrevăd posibilitatea unei generalizări. Voi fi dobândit atunci, nu un rezultat nou, ci o forţă nouă.

O formulă algebrică ce ne dă soluţia unui tip de probleme numerice, cu condiţia ca la sfârşit să înlocuim literele cu numere, este exemplul simplu care ne vine mai întâi în minte. Graţie ei, un singur calcul algebric ne scuteşte de efortul de a reîncepe necontenit noi calcule numerice. Dar acesta nu este decât un exemplu grosier. Toată lumea simte că există analogii care nu se pot exprima printr-o formulă şi care sunt cele mai valoroase.

Un rezultat nou este valoros atunci când, legând elemente demult cunoscute, dar până atunci disparate şi părând străine unele de altele, introduce brusc ordinea acolo unde stăpânea aparenţa dezordinii. El ne permite atunci să vedem dintr-o dată fiecare dintre aceste elemente şi locul pe care-l ocupă în ansamblu. Acest fapt nou nu doar că e preţios prin sine, dar el singur dă valoare tuturor faptelor vechi pe care le leagă. Spiritul nostru este infirm aşa cum sunt şi simţurile noastre. El s-ar pierde în complexitatea lumii dacă această complexitate n-ar fi armonioasă, n-ar vedea din ea decât detaliile în felul unui miop şi ar fi silit să uite fiecare din aceste detalii înainte de a-l examina pe următorul, pentru că ar fi incapabil să cuprindă totul. Singurele fapte demne de atenţia noastră sunt acelea care introduc ordine în această complexitate şi o fac astfel accesibilă.

Matematicienii acordă o mare importanţă eleganţei metodelor şi rezultatelor lor. Aceasta nu ţine de un pur diletantism. Ce anume

într-o soluţie, într-o demonstraţie ne dă efectiv sentimentul eleganţei ? Armonia diverselor părţi, simetria lor, fericita lor echilibrare ; într-un cuvânt, tot ce pune în ele ordine, tot ce le conferă unitate, ceea ce ne permite, în consecinţă, să vedem limpede şi să înţelegem ansamblul concomitent cu detaliile. Dar tocmai asta şi dă un mare randament. Într-adevăr, cu cât vom vedea acest ansamblu mai clar şi dintr-o singură privire, cu cât vom sesiza mai bine analogiile sale cu alte obiecte vecine, cu atât vom avea, în consecinţă, mai multe şanse de a ghici generalizările posibile. Eleganţa poate proveni din sentimentul neprevăzutului prin întâlnirea neaşteptată a unor obiecte pe care nu suntem obişnuiţi să le apropiem ; ea e şi aici fecundă, pentru că ne dezvăluie astfel înrudiri până atunci necunoscute ; e fecundă chiar şi când nu rezultă decât din contrastul între simplitatea mijloacelor şi complexitatea problemei puse ; ea ne face atunci să reflectăm la motivul acestui contrast şi cel mai adesea ne face să vedem că acest motiv nu este hazardul, ci se află în vreo lege nebănuită. Într-un cuvânt, sentimentul eleganţei matematice nu este altceva decât satisfacţia datorată nu ştiu cărei adaptări între soluţia tocmai descoperită şi nevoile spiritului nostru. Şi această soluţie poate fi pentru noi un instrument datorită însăşi adaptării amintite. Această satisfacţie estetică este apoi legată de economia de gândire. Îmi vine iarăşi în minte comparaţia cu Erechteion, dar nu vreau să abuzez de ea.

Pentru acelaşi motiv, atunci când un calcul puţin cam lung ne-a condus la un rezultat simplu şi frapant, nu suntem satisfăcuţi ; câtă vreme n-am arătat că *am fi putut prevedea*, dacă nu întreg acel rezultat, cel puţin trăsăturile sale cele mai caracteristice. De ce ? Ce ne împiedică să ne mulţumim cu un calcul care ne-a comunicat, pare-se, tot ce doream să ştim ? Aceasta pentru că, în cazuri asemănătoare, lungul calcul n-ar mai putea fi de folos, şi, de asemenea, pentru că nu există un raţionament de regulă semiintuitiv care ne-ar fi putut permite să-l prevedem. Acest raţionament fiind scurt, îi vedem dintr-o privire toate părţile, aşa încât ne dăm seama imediat ce trebuie schimbat în el pentru a-l adapta tuturor problemelor de aceeaşi natură care pot apărea. Şi întrucât ne permite să prevedem dacă soluţia acestor probleme va fi simplă, el ne arată cel puţin dacă merită să facem calculul.

Ceea ce am spus mai sus este de-ajuns pentru a arăta cât de zadarnică ar fi încercarea de a înlocui libera iniţiativă a matematicianului cu un procedeu mecanic. Pentru a obţine un rezultat care să aibă o valoare reală, nu e suficient să macini calcule sau să ai o maşină de pus lucrurile în ordine ; ceea ce valorează ceva nu e nici măcar ordinea, ci ordinea neaşteptată. Maşina poate depăşi faptul brut, sufletul faptului îi va scăpa mereu.

Începând cu mijlocul secolului trecut, matematicienii sunt din ce în ce mai preocupaţi să ajungă la rigoarea absolută. Ei au dreptate, şi această tendinţă se va accentua tot mai mult. În matematici rigoarea nu e totul, dar în absenţa ei nu există nimic. O demonstraţie care nu e riguroasă este totuna cu neantul. Cred că nimeni n-ar contesta acest adevăr. Dacă l-am lua însă într-un sens prea literal, am fi conduşi la concluzia că înainte de 1820, bunăoară, nu existau matematici — ceea ce ar fi vădit excesiv. Geometrii din acea vreme subînţelegeau fără efort ceea ce noi explicăm prin discursuri prolixe. Aceasta nu înseamnă că ei nu o vedeau defel. Dar treceau prea repede cu vederea peste acest lucru, iar ca să-l vadă bine ar fi trebuit să facă efortul de a-l exprima.

E mereu necesar s-o spunem de atâtea ori ? Cei care primii s-au preocupat înainte de orice de rigoare ne-au dat raţionamente pe care putem încerca să le imităm. Dar dacă demonstraţiile ulterioare trebuie construite după acest model, tratatele de matematică vor deveni foarte lungi. Şi dacă mă tem de lungime, nu e numai pentru că mă tem de încărcarea bibliotecilor, ci pentru că, lungindu-se, demonstraţiile noastre pierd acel aspect de armonie al cărui rol util l-am explicat puţin mai înainte.

Aşadar, nu e de-ajuns să dăm modele de imitat, e necesar să urmărim economia de gândire. Trebuie ca ulterior să ne putem dispensa de aceste modele şi, în loc să repetăm un raţionament deja făcut, să-l rezumăm în câteva rânduri. Şi uneori s-a reuşit deja. Există, de pildă, un tip de raţionamente asemănătoare şi pe care le regăseam pretutindeni. Ele erau perfect riguroase, dar lungi. La un moment dat a fost imaginat cuvântul de uniformitate a convergenţei şi singur acest cuvânt le-a făcut inutile. N-a mai fost nevoie să le repetăm pentru că le puteam subînţelege. Despicătorii firului în patru ne pot face deci un dublu serviciu. Mai întâi ne pot învăţa

să procedăm ca ei la nevoie, dar mai ales ne pot permite cel mai adesea să nu facem ca ei, fără a sacrifica totuşi nimic din rigoare.

Am văzut cu ajutorul unui exemplu ce importanţă au cuvintele în matematici, dar aş putea cita multe altele. E de necrezut câtă economie de gândire, după expresia lui Mach, poate aduce un cuvânt bine ales. Nu ştiu dacă nu am spus deja undeva că matematica este arta de a da acelaşi nume unor lucruri diferite. E necesar ca aceste lucruri, diferite ca materie, să fie asemănătoare ca formă, ca să se poată insera în acelaşi tipar. Atunci când limbajul a fost bine ales, suntem absolut uimiţi văzând că toate demonstraţiile date pentru un obiect cunoscut se aplică imediat multor obiecte noi. Nu avem aici nimic de schimbat, nici măcar numele, pentru că numele au devenit aceleaşi.

Cel mai adesea un cuvânt bine ales e suficient pentru a face să dispară excepţiile pe care le comportau regulile enunţate în vechiul limbaj. Tocmai în acest scop au fost imaginate cantităţile negative, cantităţile imaginare, punctele de la infinit şi atâtea altele. Şi să nu uităm că excepţiile sunt pernicioase, pentru că ascund legile.

Ei bine, aceasta este una dintre trăsăturile după care recunoaştem faptele de mare randament, acelea care permit asemenea fericite inovaţii de limbaj. Uneori, faptul brut e atunci puţin interesant. A putut fi semnalat de multe ori fără să fi adus mare serviciu ştiinţei. El nu dobândeşte valoare decât atunci când un gânditor mai bine avizat observă apropierea pe care o pune în evidenţă şi o simbolizează cu ajutorul unui cuvânt.

Fizicienii, de altminteri, acţionează absolut la fel. Ei au inventat cuvântul energie şi acest cuvânt a fost foarte rodnic, pentru că şi el a creat legea eliminând excepţiile, pentru că a dat acelaşi nume unor lumi diferite ca materie şi asemănătoare ca formă.

Printre cuvintele care au exercitat cea mai fericită influenţă le-aş semnala pe cele de grup şi invariant. Ele ne-au făcut să observăm esenţa multor raţionamente matematice ; ne-au arătat în câte cazuri vechii matematicieni considerau grupuri fără s-o ştie, şi cum, crezându-se foarte îndepărtaţi unii de alţii, se descopereau brusc apropiaţi fără să înţeleagă de ce.

Noi am spune azi că ei consideraseră grupuri izomorfe. Ştim acum că în cazul unui grup materia prezintă puţin interes, că doar

forma interesează, şi că atunci când cunoaştem bine un grup, cunoaştem prin aceasta toate grupurile izomorfe ; şi, graţie acestor cuvinte de grup şi izomorfism care rezumă în câteva silabe această regulă subtilă şi o fac repede familiară tuturor spiritelor, trecerea este imediată şi se poate efectua economisind orice efort de gândire. Ideea de grup se asociază de altfel cu cea de transformare. De ce se acordă atâta importanţă inventării unei transformări noi ? Pentru că dintr-o singură teoremă ea ne permite să extragem zece sau douăzeci. Ea are aceeaşi valoare ca un zero adăugat la dreapta unui număr întreg.

Iată ce anume a determinat până acum sensul mişcării ştiinţei matematice şi, cu siguranţă, ce îl va determina şi în viitor. La aceasta contribuie însă în egală măsură natura problemelor care se pun. Nu putem uita care trebuie să fie scopul nostru. După părerea mea, acest scop este dublu. Ştiinţa noastră se învecinează în acelaşi timp cu filosofia şi cu fizica, şi noi lucrăm pentru cei doi vecini ai noştri ; de aceea i-am văzut şi îi vom mai vedea pe matematicieni mergând în cele două direcţii opuse.

Pe de o parte, ştiinţa matematică trebuie să reflecteze asupră-şi, şi acest lucru este util pentru că a reflecta asupră-şi înseamnă a reflecta asupra minţii omeneşti care a creat-o, cu atât mai mult cu cât, printre creaţiile acesteia, matematica e cel mai puţin îndatorată unor împrumuturi externe. De aceea anumite speculaţii matematice cum sunt cele care vizează studiul postulatelor, al geometriilor neobişnuite, al funcţiilor cu aspecte ciudate sunt folositoare. Cu cât aceste speculaţii se vor îndepărta mai mult de concepţiile cele mai comune, şi deci de natură şi de aplicaţii, cu atât mai bine ne vor arăta ele ce poate face mintea omenească, atunci când se sustrage din ce în ce mai mult tiraniei lumii exterioare, cu atât mai bine, în consecinţă, ne vor face s-o cunoaştem în ea însăşi.

Dar grosul armatei noastre trebuie îndreptat în direcţia opusă, spre natură.

Aici îi întâlnim pe fizicianul sau pe inginerul care ne spune : „Mi-aţi putea integra această ecuaţie diferenţială, aş avea nevoie de aşa ceva peste opt zile în vederea cutărei construcţii care trebuie terminată la acea dată". „Această ecuaţie, răspundem noi, nu face parte din tipurile integrabile, ştiţi doar că ele nu sunt numeroase".

„Da, o ştiu, dar atunci voi la ce o folosiţi ?" Cel mai adesea e de-ajuns să ne înţelegem. În realitate, inginerul nu are nevoie de integrală în termeni finiţi ; el are nevoie să cunoască forma generală a funcţiei integrale, sau ar dori numai o anumită cifră care s-ar deduce uşor din acea integrală, dacă am cunoaşte-o. De obicei n-o cunoaştem, dar am putea calcula fără ea cifra respectivă, dacă am şti exact de care cifră are nevoie inginerul şi cu ce aproximaţie.

Altădată o ecuaţie nu trecea drept rezolvată decât atunci când i s-a exprimat soluţia cu ajutorul unui număr finit de funcţii cunoscute — ceea ce nu e posibil decât abia într-un caz dintr-o sută. Ceea ce putem face totdeauna, sau mai curând ceea ce trebuie totdeauna să încercăm să facem este să rezolvăm problema, ca să zicem aşa, *calitativ*, adică să încercăm să cunoaştem forma generală a curbei care reprezintă funcţia necunoscută.

Rămâne apoi să găsim soluţia *cantitativă* a problemei. Dar dacă necunoscuta nu poate fi determinată printr-un calcul finit, o putem oricând reprezenta printr-o serie infinită convergentă pe baza căreia o putem calcula. Acest fel de a proceda poate fi considerat ca o adevărată soluţie. Se povesteşte că Newton i-a comunicat lui Leibniz o anagramă aproximativ de tipul : *aaaaabbbeeeeii* etc. Leibniz, fireşte, nu pricepea nimic din ea. Dar noi care deţinem cheia ştim că această anagramă vrea să zică, traducând-o în limbaj modern : „Eu nu ştiu să integrez toate ecuaţiile diferenţiale" şi suntem în măsură să ne spunem că Newton avea multe şanse sau că îşi făcea iluzii ciudate. El voia să spună pur şi simplu că putea să formeze (prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi) o serie de puteri care satisfac formal ecuaţia propusă.

O asemenea soluţie nu ne-ar mai mulţumi acum, şi aceasta pentru două motive : deoarece convergenţa e prea lentă şi deoarece termenii se succed fără a se supune vreunei legi. Dimpotrivă, seria Θ mi se pare că nu lasă nimic de dorit, mai întâi pentru că ea converge foarte repede (spre satisfacţia practicianului, care doreşte să obţină numărul său cât mai grabnic cu putinţă), şi apoi pentru că sesizăm dintr-o privire legea termenilor (spre satisfacţia nevoilor estetice ale teoreticianului).

Dar atunci nu mai există probleme rezolvate şi probleme nerezolvate ; există doar probleme *mai mult sau mai puţin* rezolvate,

după cum o permite o serie de convergenţă mai mult sau mai puţin rapidă sau guvernată de o lege mai mult sau mai puţin armonioasă. Se întâmplă totuşi ca o soluţie imperfectă să ne conducă spre o soluţie mai bună. Uneori seria este de convergenţă atât de lentă, încât calculul este impracticabil şi nu s-a reuşit decât să se demonstreze posibilitatea problemei.

Şi atunci inginerul socoteşte derizoriu acest rezultat, şi are dreptate, pentru că nu l-ar ajuta să-şi termine construcţia la data fixată. Îl interesează prea puţin să ştie dacă aşa ceva va fi de folos inginerilor din secolul al XXII-lea ; noi, în schimb, gândim altfel şi suntem uneori mai fericiţi de a fi economisit o zi de muncă nepoţilor noştri decât o oră contemporanilor noştri.

Uneori ratonând — empiric, ca să zicem aşa — ajungem la o formulă suficient de convergentă. Ce vreţi mai mult, ne spune inginerul. Şi totuşi, nu suntem mulţumiţi, am fi vrut să *prevedem* această convergenţă. De ce ? Pentru că dacă am fi ştiut s-o prevedem o dată, am putea s-o prevedem şi altă dată. Că am reuşit, nu e mare lucru pentru noi, dacă nu avem în mod serios speranţa de a reîncepe.

Pe măsură ce ştiinţa se dezvoltă, devine tot mai greu s-o cuprinzi integral. Se încearcă atunci fragmentarea ei, fiecare mulţumindu-se să se specializeze într-un domeniu limitat. Continuarea în acest sens ar constitui un obstacol supărător în calea progreselor ştiinţei. Am spus-o, aceste progrese se pot realiza prin apropieri neaşteptate între diversele ei părţi. Specializarea excesivă echivalează cu interzicerea acestor apropieri. Sperăm că anumite congrese precum cele de la Heidelberg şi Roma, punându-ne în relaţii reciproce, ne vor deschide vederi asupra câmpului vecinului, ne vor obliga să-l comparăm cu cel al nostru, să ieşim un pic din cătunul nostru. Ele vor fi astfel cel mai bun remediu la pericolul semnalat.

Dar ne-am pierdut prea mult vremea cu generalităţi, e timpul să intrăm în detaliu.

Să trecem în revistă diversele ştiinţe particulare al căror ansamblu formează matematicile. Să vedem ce a realizat fiecare dintre ele, spre ce tinde şi ce putem spera de la ea. Dacă opiniile precedente sunt juste, trebuie să vedem că marile progrese din trecut s-au produs atunci când s-a luat cunoştinţă de similitudinea formei lor,

când ele s-au modelat una după cealaltă, astfel ca fiecare dintre ele să poată profita de pe urma cuceririlor celeilalte. Trebuie în acelaşi timp să întrevedem, în apropieri de acelaşi gen, progresele viitoare.

Aritmetica

Progresele aritmeticii au fost mult mai lente decât cele ale algebrei şi analizei. Şi e uşor să înţelegem de ce. Sentimentul continuităţii este un ghid preţios care lipseşte aritmeticianului. Fiecare număr întreg este separat de celelalte, are, ca să zicem aşa, propria lui individualitate. Fiecare este un fel excepţie şi de aceea teoremele generale vor fi mai rare în teoria numerelor ; şi tot de aceea cele care există vor fi mai ascunse şi se vor sustrage timp mai îndelungat cercetătorilor.

Dacă aritmetica e în întârziere faţă de algebră şi analiză, lucrul cel mai bun pe care îl are ea de făcut e să încerce să se modeleze după aceste ştiinţe pentru a profita de avansul lor. Aritmeticianul trebuie deci să ia ca ghid analogiile cu algebra. Aceste analogii sunt numeroase şi dacă, în multe cazuri, ele n-au fost studiate cu suficientă atenţie ca să devină utilizabile, sunt cel puţin presimţite de multă vreme şi însuşi limbajul celor două ştiinţe arată că au fost observate. Se vorbeşte astfel de numere transcendente şi ne dăm astfel seama de faptul că viitoarea clasificare a acestor numere are deja drept imagine clasificarea funcţiilor transcendente. Totuşi, nu se vede încă foarte bine cum s-ar putea trece de la o clasificare la alta. Dar dacă s-ar fi văzut, trecerea s-ar fi efectuat deja şi deci n-ar mai fi opera viitorului.

Primul exemplu care îmi vine în minte este teoria congruenţelor, în care găsim o paralelă perfectă la teoria ecuaţiilor algebrice. Fără îndoială, se va ajunge la completarea acestui paralelism care trebuie să existe, de pildă, între teoria curbelor algebrice şi cea a congruenţelor cu două variabile. Şi atunci când vor fi rezolvate problemele referitoare la congruenţele cu mai multe variabile, se va fi făcut un prim pas spre rezolvarea multor probleme de analiză nedeterminată.

Algebra

Teoria ecuaţiilor algebrice va reţine încă multă vreme atenţia geometrilor ; direcţiile din care poate fi abordată sunt numeroase şi diverse.

Nu trebuie să credem că algebra e încheiată pentru că ne oferă reguli de formare a tuturor combinărilor posibile; rămâne să fie cercetate combinările interesante, acelea care satisfac o condiţie sau alta. Se va constitui astfel un soi de analiză nedeterminată în care necunoscutele nu vor mai fi numere întregi, ci polinoame. De această dată algebra va lua drept model aritmetica, ghidându-se după analogia numărului întreg fie cu polinomul întreg cu coeficienţi, oarecare, fie cu polinomul întreg cu coeficienţi întregi.

Geometria

Se pare că geometria nu poate conţine nimic care să nu se găsească deja în algebră sau în analiză ; că faptele geometrice nu sunt altceva decât faptele din algebră sau din analiză exprimate într-un alt limbaj. S-ar putea deci crede că după trecerea în revistă de mai sus nu ne-ar mai rămâne nimic de spus care să se refere în mod special la geometrie. Aceasta ar însemna să nesocotim însăşi importanţa unui limbaj bine făcut, să nu înţelegem ce anume adaugă lucrurilor înseşi modul de a le exprima şi, în consecinţă, de a le grupa.

Mai întâi, consideraţiile geometrice prilejuiesc punerea de noi probleme. Acestea sunt, dacă vreţi, probleme de analiză, dar pe care nu ni le-am fi pus niciodată în legătură cu analiza. Analiza profită totuşi de pe urma lor aşa cum profită de problemele pe care este obligată să le rezolve pentru a satisface nevoile fizicii.

Un mare avantaj al geometriei constă în aceea că simţurile pot veni aici în sprijinul inteligenţei şi ne ajută să ghicim calea de urmat. Multe spirite preferă să aducă problemele de analiză la o formă geometrică. Din nefericire, simţurile nu ne pot duce departe şi nu ne părăsesc atunci când vrem să ne aventurăm dincolo de cele

trei dimensiuni clasice. Aceasta înseamnă oare că, în afara acestui domeniu restrâns unde ele par a vrea să ne închidă, nu trebuie să mai contăm decât pe analiza pură şi că orice geometrie cu mai mult de trei dimensiuni este vană şi lipsită de obiect ? În generaţia care ne-a precedat, cei mai mari maeştri ar fi răspuns „da" ; noi suntem azi atât de familiarizaţi cu această noţiune, încât putem vorbi despre ea, chiar într-un curs universitar, fără a provoca prea mare uimire.

Dar la ce poate servi ? E uşor de văzut : ea ne oferă în primul rând un limbaj foarte comod, care exprimă în termeni foarte concişi ceea ce limbajul analitic obişnuit ar spune în fraze prolixe. Mai mult, acest limbaj ne face să numim cu acelaşi nume ceea ce se aseamănă şi afirmă analogii pe care nu le mai putem uita. Aşadar el ne îngăduie încă să ne orientăm în acest spaţiu care este prea mare pentru noi şi pe care nu-l putem vedea, reamintindu-ne mereu spaţiul vizibil care nu este, fără îndoială, decât o imagine imperfectă a celui dintâi, dar, totuşi, o imagine. Şi aici, ca în toate exemplele precedente, tocmai analogia cu ce e simplu ne permite să înţelegem complexul.

Această geometrie cu mai mult de trei dimensiuni nu este o simplă geometrie analitică, ea nu este pur cantitativă, e şi calitativă şi mai ales prin aceasta devine ea interesantă. Există o ştiinţă care se numeşte *Analysis Situs** şi care are ca obiect studiul relaţiilor de poziţie ale diverselor elemente ale unei figuri, abstracţie făcând de mărimile lor. Această geometrie este pur calitativă ; teoremele sale ar rămâne adevărate dacă figurile, în loc să fie exacte, ar fi stângaci imitate de un copil. Se poate face şi o *Analysis Situs* cu mai mult de trei dimensiuni. Importanţa acestei ştiinţe este uriaşă şi n-aş putea insista aici prea mult asupra ei. Ar fi de ajuns s-o demonstreze modul în care s-a folosit de *Analysis Situs,* Riemann, unul din principalii ei creatori. Trebuie să se ajungă la construirea ei completă în spaţiile superioare. Vom avea atunci un instrument care va permite realmente să vedem în hiperspaţiu şi să compenseze simţurile noastre.

* Vechea denumire, ieşită din uz, a topologiei (*n. tr.*).

Poate că problemele de *Analysis Situs* nu s-ar fi pus dacă nu s-ar fi vorbit decât limbajul analitic ; sau mai curând — mă înşel — ele s-ar fi pus cu siguranţă, pentru că soluţia lor este necesară foarte multor probleme de analiză. Dar s-ar fi pus izolat, unele după altele, şi fără să se poată observa legătura lor comună.

Cantorismul

Am vorbit mai sus despre nevoia pe care o avem de a urca necontenit la primele principii ale ştiinţei noastre şi despre folosul pe care îl poate trage de aici studiul minţii omeneşti. Această nevoie a inspirat două tentative care au deţinut un loc important în istoria cea mai recentă a matematicilor. Prima este cantorismul, care a adus ştiinţei serviciile pe care le cunoaştem. Cantor a introdus în ştiinţă un mod nou de a considera infinitul matematic, şi vom avea ocazia să revenim asupra acestui lucru în Capitolul III din Cartea a II-a. Una dintre trăsăturile caracteristice ale cantorismului este aceea că, în loc de a ridica la general clădind construcţii din ce în ce mai complicate şi de a defini prin construcţie, porneşte de la *genus supremum* şi nu defineşte, cum ar fi spus scolasticii, decât *per genus proximum et differentiam specificam*. De unde aversiunea pe care a inspirat-o uneori unor spirite, lui Hermite bunăoară, a căror idee favorită era să compare ştiinţele matematice cu ştiinţele naturale. La majoritatea dintre noi aceste prejudecăţi s-au risipit, dar s-a ajuns astfel la anumite paradoxuri, la anumite contradicţii aparente, care ar fi umplut de bucurie pe Zenon din Elea şi şcoala din Megara. Şi atunci fiecare trebuie să caute remediul. Cred, în ceeea ce mă priveşte — şi nu sunt singurul — că lucrul important este să nu introducem niciodată decât entităţi pe care le putem defini complet într-un număr finit de cuvinte. Oricare ar fi remediul adoptat, ne putem făgădui bucuria medicului chemat să supravegheze un frumos caz patologic.

Cercetarea postulatelor

Pe de altă parte, matematicienii s-au străduit să enumere postulatele mai mult sau mai puţin ascunse care servesc drept fundament diverselor teorii matematice. Hilbert a obţinut rezultatele cele mai strălucite. La început se pare că acest domeniu este foarte limitat şi că nu mai e nimic de făcut atunci când inventarul va fi încheiat, ceea ce nu poate întârzia. Când vom fi enumerat însă totul, vor exista multe modalităţi de a-l clasifica. Un bun bibliotecar are mereu de lucru, şi fiecare clasificare nouă va fi instructivă pentru filosof.

Mă opresc aici cu această trecere în revistă, care nu-mi pot propune să fie completă. Cred că aceste exemple vor fi fost suficiente pentru a arăta prin ce mecanism au progresat în trecut ştiinţele matematice şi în ce sens trebuie să evolueze ele în viitor.

CAPITOLUL III

Invenţia matematică

Geneza invenţiei matematice constituie o problemă care trebuie să suscite cel mai viu interes psihologului. Invenţia este actul în care mintea omenească pare a împrumuta cel mai puţin de la lumea exterioară, unde ea nu acţionează sau nu pare a acţiona decât prin sine însăşi şi asupră-şi, aşa încât studiind procesul gândirii geometrice, putem spera să atingem aspectele esenţiale ale vieţii omeneşti.

Lucrul acesta a fost demult înţeles. Acum câteva luni o revistă intitulată *Învăţământul matematic* şi condusă de Laisant şi Fehr a întreprins o anchetă asupra deprinderilor mentale şi metodelor de lucru ale diverşilor matematicieni. Fixasem liniile principale ale acestui articol atunci când au fost publicate rezultatele anchetei menţionate. Nu le-am putut deci utiliza. Mă limitez să spun că majoritatea mărturiilor confirmă concluziile mele. Nu spun unanimitate, căci atunci când consulţi sufragiul universal nu te poţi lăuda că întruneşti unanimitatea.

Un prim fapt trebuie să ne mire, sau mai degrabă ar trebui să ne mire, dacă n-am fi atât de obişnuiţi cu el. Cum se face că există oameni care nu înţeleg matematicile ? Dacă matematicile nu invocă decât regulile logicii, acelea care sunt acceptate de toate minţile sănătoase ; dacă evidenţa lor se bazează pe principii care sunt comune tuturor oamenilor şi pe care numai un nebun le-ar putea nega, cum se face că există atâtea persoane total refractare la matematici ?

Nu e nimic misterios în aceea că nu toată lumea e capabilă de invenţie. E de acceptat şi faptul că nu toată lumea poate reţine o demonstraţie pe care a învăţat-o cândva. Ceea ce pare însă sur-

prinzător la reflecţie e că nu toată lumea poate înţelege un raţionament matematic în momentul în care i-l expui. Şi totuşi cei care nu pot urmări acel raţionament decât cu dificultate constituie majoritatea : lucrul acesta e incontestabil şi experienţa profesorilor din învăţământul secundar nu mă va contrazice, fără îndoială.

Şi mai e ceva : cum este posibilă eroarea în matematici ? O inteligenţă sănătoasă nu trebuie să comită greşeli de logică, şi totuşi există spirite foarte fine care nu s-ar poticni într-un raţionament scurt de felul acelora care trebuie făcute în actele obişnuite ale vieţii şi care sunt incapabile să urmărească sau să repete fără eroare demonstraţiile din matematici care sunt mai lungi, dar care nu constituie în definitiv decât o acumulare de mici raţionamente absolut asemănătoare cu cele pe care le fac cu atâta uşurinţă. E necesar să adăugăm că matematicienii înşişi nu sunt infailibili ?

Răspunsul mi se pare că se impune. Să ne imaginăm un lung şir de silogisme, concluziile primelor servind drept premise următoarelor. Am fi capabili să înţelegem fiecare silogism în parte. Nu în trecerea de la premise la concluzie riscăm să ne înşelăm. Dar între momentul în care întâlnim pentru prima dată o propoziţie în calitate de concluzie a unui silogism şi cel în care o regăsim ca premisă a unui alt silogism, se va fi scurs uneori mult timp, se vor fi derulat numeroase inele ale lanţului. Se poate deci întâmpla să fi uitat-o, sau, ceea ce e mai grav, să-i fi uitat sensul. Se poate deci întâmpla să fie înlocuită cu o propoziţie puţin diferită sau, deşi păstrând acelaşi enunţ, să i se atribuie un sens puţin diferit. Te expui astfel erorii.

Adeseori matematicianul trebuie să se folosească de o regulă ; în mod firesc el a început cu demonstraţia acelei reguli. În momentul în care această demonstraţie era cu totul proaspătă în amintirea sa, el îi înţelegea perfect sensul şi câmpul de acţiune şi nu risca s-o altereze. După aceea însă a încredinţat-o memoriei sale şi n-o mai aplică decât în mod mecanic. Şi atunci, dacă memoria îl trădează, o poate aplica greşit. Astfel, ca să luăm un exemplu simplu şi aproape banal, facem uneori greşeli de calcul pentru că am uitat tabla înmulţirii.

În această privinţă, aptitudinea specială pentru matematici nu s-ar datora decât unei memorii foarte sigure, sau unei atenţii foarte

riguroase. Ar fi o calitate asemănătoare celei a jucătorului de whist, care reţine cărţile ieşite ; sau, ca să urcăm o treaptă, cu cea a jucătorului de şah care poate considera un număr foarte mare de combinaţii şi le poate păstra în memoria sa. Orice bun matematician ar trebui să fie în acelaşi timp bun jucător de şah şi invers. Şi ar trebui să fie deopotrivă un bun calculator. Ceea ce se şi întâmplă, desigur, uneori. Gauss, de pildă, a fost totodată un geometru de geniu şi un calculator foarte precoce şi foarte sigur.

Există însă excepţii, sau mai curând mă înşel, nu pot numi aşa ceva excepţii, căci excepţiile ar fi atunci mai numeroase decât cazurile conforme regulii. Gauss, dimpotrivă, era o excepţie. În ce mă priveşte, sunt obligat s-o mărturisesc, eu sunt absolut incapabil să fac o adunare fără greşeală. Aş fi în egală măsură un foarte prost jucător de şah. Aş calcula bine că jucând în cutare fel mă expun cutărui pericol ; aş trece în revistă multe alte mutări pe care le-aş respinge pentru alte motive, şi în cele din urmă aş face mutarea examinată la început, după ce voi fi uitat între timp pericolul pe care îl prevăzusem.

Într-un cuvânt, memoria mea nu este proastă, dar ar fi insuficientă ca să facă din mine un bun jucător de şah. De ce aşadar nu-mi lipseşte ea într-un raţionament matematic dificil în care majoritatea jucătorilor de şah s-ar pierde ? Evident, pentru că ea este călăuzită de mersul general al raţionamentului. O demonstraţie matematică nu e o simplă alăturare de silogisme ; e vorba de silogisme *situate într-o anumită ordine*, şi ordinea în care aceste elemente sunt situate e mult mai importantă decât elementele înseşi. Dacă am sentimentul, intuiţia — ca să zic aşa — a acestei ordini, astfel încât să observ dintr-o privire ansamblul raţionamentului, nu mai trebuie să mă tem că uit unul din elemente, fiecare se va situa de la sine în cadrul ce-i este pregătit şi fără nici un efort de memorie.

Mi se pare atunci, repetând un raţionament învăţat, că ar fi trebuit să-l pot inventa. Aceasta nu este adesea decât o iluzie. Dar şi atunci, chiar dacă nu sunt suficient de puternic pentru a crea de unul singur, îl reinventez eu însumi, pe măsură ce îl repet.

Se înţelege că acest sentiment, această intuiţie a ordinii matematicii, care ne face să ghicim armonii şi relaţii ascunse, nu poate

aparţine tuturor. Unii nu posedă nici acest sentiment delicat şi greu de definit, nici o forţă a memoriei şi atenţiei deasupra mediei, şi atunci sunt absolut incapabili să înţeleagă matematicile cât de cât evoluate. Aceştia constituie majoritatea. Alţii nu au avut acest sentiment decât la un nivel inferior, dar sunt înzestraţi cu o memorie puţin obişnuită şi cu o mare vigoare a atenţiei. Ei învaţă pe dinafară detaliile unele după altele, pot să înţeleagă matematicile şi uneori să le explice, dar nu sunt în stare să creeze. Alţii, în sfârşit, posedă într-un grad mai mult sau mai puţin ridicat intuiţia specială de care vorbeam şi atunci nu doar că pot înţelege matematicile, chiar în cazul în care memoria lor nu are nimic extraordinar, dar pot să devină creatori şi să încerce să inventeze cu mai mult sau mai puţin succes, după cum acea intuiţie este la ei mai mult sau mai puţin dezvoltată. Ce este de fapt invenţia matematică ? Ea nu constă în a face noi combinaţii cu entităţi matematice deja cunoscute. Oricine ar putea face aşa ceva, dar combinaţiile care ar putea fi astfel formate ar fi infinit numeroase, şi majoritatea ar fi absolut lipsite de interes. Invenţia constă tocmai în a nu construi combinaţiile inutile şi în a le construi pe cele utile şi care nu constituie decât o infimă majoritate. A inventa înseamnă a discerne, a alege.

Am explicat mai sus cum trebuie să se facă această alegere. Faptele matematice demne de a fi studiate sunt acelea care, prin analogia lor cu alte fapte, ne pot conduce la cunoaşterea unei legi matematice, la fel cum faptele experimentale ne conduc la cunoaşterea unei legi fizice. Sunt acelea care ne dezvăluie înrudiri nebănuite între alte fapte, demult cunoscute, dar pe care le credeam pe nedrept străine unele de altele.

Printre combinaţiile care vor fi alese, cele mai fertile vor fi cele formate din elemente împrumutate din domenii foarte îndepărtate ; dar nu vreau să spun că pentru a inventa e de-ajuns să apropii obiecte cât se poate de disparate ; cele mai multe din combinaţiile astfel formate vor fi complet sterile. Unele însă, foarte puţine, sunt cele mai fecunde.

Spuneam că a inventa înseamnă a alege. Dar cuvântul nu este poate cu totul îndreptăţit, el ne duce cu gândul la un cumpărător căruia i se prezintă un mare număr de eşantioane şi care le examinează pe rând în vederea alegerii sale. Aici eşantioanele ar fi atât de

numeroase că n-ar fi de-ajuns o viaţă întreagă pentru a le examina. Nu aşa se întâmplă de fapt. Combinaţiile sterile nici nu se prezintă minţii inventatorului. În câmpul conştiinţei sale nu vor apărea niciodată decât combinaţiile realmente utile, şi unele pe care le va respinge, dar care nu sunt cu totul străine la trăsăturile combinaţiilor utile. Totul se petrece ca şi cum inventatorul ar fi un examinator de gradul al doilea care n-ar mai avea de pus întrebări decât candidaţilor declaraţi admisibili : după o primă probă.

Dar ceea ce am spus până acum este ce se poate observa sau infera, citind scrierile geometrilor, cu condiţia de a chema reflecţia în ajutorul lecturii.

E timpul să pătrundem mai adânc şi să vedem ce se întâmplă în chiar sufletul matematicianului. Pentru aceasta, cred că cel mai bine este să evoc unele amintiri personale. Mă voi restrânge totuşi povestindu-vă cum am scris primul meu memoriu despre funcţiile fuchsiene.Vă cer iertare pentru utilizarea câtorva expresii tehnice, dar ele nu trebuie să vă sperie, nu trebuie defel să le înţelegeţi. Voi spune, bunăoară, că am găsit demonstraţia unei teoreme în anumite împrejurări, acea teoremă va avea un nume barbar, pe care mulţi dintre voi nu-l vor cunoaşte, dar n-are nici o importanţă. Nu teorema este interesantă pentru psiholog, ci împrejurările.

Mă străduiam, de două săptămâni, să demonstrez că nu poate exista nici o funcţie analoagă cu ceea ce am numit apoi funcţiile fuchsiene. Eram pe atunci foarte ignorant. Mă aşezam zilnic la masa de lucru, unde rămâneam o oră sau două încercând un mare număr de combinaţii şi nu ajungeam la nici un rezultat. Într-o zi am băut cafea neagră, contrar obiceiului, şi n-am mai putut adormi. M-au asaltat o sumedenie de idei. Le simţeam cum se ciocnesc, până ce două dintre ele s-au acroşat, ca să zic aşa, pentru a forma o combinaţie stabilă. Dimineaţa, stabilisem existenţa unei clase de funcţii fuchsiene, cele care derivă din seria hipergeome-trică. N-am mai avut decât să redactez rezultatele, ceea ce mi-a luat doar câteva ore.

Am vrut apoi să reprezint aceste funcţii prin câtul a două serii. Această idee a fost perfect conştientă şi reflectată. Mă călăuzea analogia cu funcţiile eliptice. Mă întrebam care ar trebui

să fie proprietăţile acestor serii, dacă ele există, şi am reuşit fără dificultate să formez seriile pe care le-am numit tetafuchsiene.

Am plecat atunci din Caen, unde locuiam, ca să particip la o expediţie geologică întreprinsă de Şcoala de mine. Peripeţiile călătoriei m-au făcut să uit de lucrările mele matematice. Ajunşi la Coutances, am urcat într-un omnibuz pentru nu ştiu ce plimbare. În momentul în care puneam piciorul pe treapta vehiculului mi-a venit ideea, fără ca nimic din gândurile mele anterioare să pară a mă fi pregătit în această direcţie, că transformările de care mă folosisem pentru a defini funcţiile fuchsiene sunt identice cu cele din geometria neeuclidiană. Nu am verificat. N-aş fi avut răgazul deoarece, abia aşezat în omnibuz, am reluat conversaţia începută. Dar am avut imediat o certitudine deplină. Revenit la Caen, am verificat rezultatul cu mintea odihnită, spre a fi cu conştiinţa împăcată.

Am început atunci să studiez probleme de aritmetică fără vreun mare rezultat aparent şi fără să bănuiesc că acest lucru putea avea cea mai mică legătură cu cercetările mele anterioare. Dezgustat de insucces, m-am dus să petrec câteva zile la ţărmul mării şi mă gândeam la cu totul altceva. Într-o zi, plimbându-mă pe faleză, mi-a venit ideea — mereu cu aceleaşi trăsături de concizie, instantaneitate şi certitudine nemijlocită — că transformările aritmetice ale formelor cvadratice ternare în indefinite sunt identice cu cele din geometria neeuclidiană.

După ce m-am întors la Caen am reflectat asupra acestui rezultat şi am tras consecinţele ce decurgeau din el. Exemplul formelor cuadratice îmi arăta că există şi alte grupuri fuchsiene decât cele ce corespund seriei hipergeometrice. Mi-am dat seama că le puteam aplica teoria seriilor tetafuchsiene şi că, în consecinţă, există şi alte funcţii fuchsiene decât cele care derivă din seria hipergeometrică, singurele pe care le cunoşteam până atunci. Natural, mi-am propus să formez toate aceste funcţii. Le-am supus unui asediu sistematic şi am cucerit, una după alta, toate întăriturile. Rămânea totuşi una care rezista încă şi a cărei cădere avea să atragă după ea victoria decisivă. Dar toate aceste eforturi nu mi-au folosit la început decât pentru a mă face să înţeleg mai bine dificultatea, ceea ce deja însemna ceva. Toată această muncă a fost perfect conştientă.

Am plecat atunci la Mont-Valérien, unde trebuia să-mi fac serviciul militar. Am avut deci preocupări foarte diferite: Într-o zi, în timp ce traversam bulevardul, mi-a apărut brusc soluţia dificultăţii care mă blocase. N-am căutat s-o aprofundez imediat şi doar după încheierea serviciului militar am reluat problema. Dispuneam de toate elementele, n-aveam decât să le reunesc şi să le ordonez. Mi-am redactat aşadar memoriul definitiv din prima încercare şi fără nici o greutate.

M-aş limita doar la acest exemplu, e inutil să le înmulţesc. În ce priveşte celelalte cercetări ale mele, aş avea de făcut relatări cu totul asemănătoare. Şi observaţiile comunicate de alţi matematicieni în ancheta *Învăţământului matematic* n-ar putea decât să le afirme.

Ceea ce te izbeşte mai întâi sunt aceste aparenţe de iluminare subită, semne vizibile ale unei îndelungate activităţi inconştiente anterioare. Rolul jucat de această activitate inconştientă în invenţia matematică mi se pare de netăgăduit. Urmele ei se regăsesc şi în alte cazuri, unde este mai puţin evidentă. Adeseori când lucrezi la o problemă nu-ţi iese nimic bine la prima încercare. Faci apoi o pauză mai mult sau mai puţin lungă, după care te aşezi din nou în faţa mesei de lucru. Pe parcursul primei jumătăţi de oră continui să nu găseşti nimic şi apoi îţi vine brusc în minte ideea decisivă. S-ar putea spune că activitatea conştientă a fost mai fructuoasă pentru că a fost întreruptă şi repausul i-a redat minţii forţa şi prospeţimea. Este mai probabil însă că repausul a fost umplut cu o activitate inconştientă şi că rezultatul acesteia s-a revelat apoi geometrului, exact ca în cazurile pe care le-am citat ; numai că revelaţia, în loc să se producă pe timpul unei plimbări sau al unei călătorii, a avut loc într-o perioadă de activitate conştientă, dar independent de această activitate care joacă cel mult un rol de declanşare, ca şi cum ar fi stimulentul în virtutea căruia rezultatele deja dobândite în timpul repausului, dar rămase inconştiente, sunt determinate să îmbrace forma conştientă.

E de făcut şi o altă remarcă în legătură cu condiţiile acestei activităţi inconştiente : aceea că ea nu este posibilă şi în orice caz nu este fecundă decât dacă, pe de o parte, e precedată şi, pe de altă parte, urmată de o perioadă de activitate conştientă. Niciodată (şi exemplele pe care le-am citat o dovedesc deja îndeajuns) aceste

inspiraţii subite nu se produc decât după câteva zile de eforturi voluntare, care au părut absolut infructuoase şi când s-a crezut a nu face nimic bun, când se pare că au fost urmate căi absolut greşite. Aceste eforturi n-au fost deci atât de sterile pe cât se crede, ele au pus în mişcare maşina inconştientă şi, fără ele, maşina n-ar fi mers şi n-ar fi produs nimic.

Se înţelege şi mai bine necesitatea celei de-a doua perioade a activităţii conştiente, de după inspiraţie. Trebuie să pui în operă rezultatele acestei inspiraţii, să deduci consecinţele lor imediate, să le ordonezi, să redactezi demonstraţiile, dar mai ales trebuie să le verifici. Am vorbit de sentimentul de certitudine absolută care însoţeşte inspiraţia. În cazurile citate, acest sentiment nu a fost înşelător, şi cel mai adesea aşa se întâmplă. Dar trebuie să rezistăm înclinaţiei de a crede că aceasta este o regulă fără excepţie. Adeseori acest sentiment ne înşeală, deşi nu este mai puţin viu, şi nu ne dăm seama de asta decât atunci când încercăm să punem demonstraţia pe picioare. Am observat acest lucru mai ales în legătură cu ideile care mi-au venit dimineaţa sau seara stând în pat, în stare semihipnagogică.

Acestea sunt faptele. Iată acum reflecţiile pe care ni le impun. Eul inconştient sau, cum se spune, eul subliminal, joacă un rol considerabil în invenţia matematică. Aceasta rezultă din tot ce precede. De obicei se consideră însă că eul subliminal este absolut automat. Or, am văzut că activitatea matematică nu este o simplă activitate mecanică ; ea nu poate fi încredinţată unei maşini, oricât de perfecţionată am presupune-o. Nu e vorba numai de aplicarea unor reguli, de producerea cât mai multor combinaţii posibile, după anumite legi fixe. Combinaţiile astfel obţinute ar fi extrem de numeroase, inutile şi stânjenitoare. Adevărata muncă a inventatorului constă în alegerea între aceste combinaţii, astfel încât să le elimine pe cele inutile sau mai degrabă să nu-şi dea osteneala de a le face. Şi regulile care trebuie să călăuzească această alegere sunt extrem de fine şi delicate. E aproape imposibil să fie enunţate într-un limbaj precis ; sunt mai curând simţite decât formulate. Cum să imaginezi, în aceste condiţii, o sită capabilă să le aplice mecanic ?

Ni se prezintă atunci o primă ipoteză : eul subliminal nu e deloc inferior eului conştient. El nu e pur mecanic, e capabil de discernământ, e înzestrat cu tact şi fineţe, ştie să aleagă, să ghicească mai bine decât eul conştient, pentru că reuşeşte acolo unde acesta a eşuat. Într-un cuvânt, eul subliminal nu este oare superior eului conştient ? Înţelegeţi întreaga importanţă a acestei probleme. Într-o conferinţă recentă, Boutroux a arătat cum s-a pus ea în ocazii cu totul diferite şi ce consecinţe ar antrena un răspuns afirmativ (vezi, de acelaş autor, şi *Science et Religion*, pagini 313 sqq.).

Nu este impus acest răspuns afirmativ de faptele pe care tocmai le-am expus ? Mărturisesc că, în ce mă priveşte, mi-ar fi neplăcut s-o accept. Să revedem deci faptele şi să cercetăm dacă ele n-ar comporta o altă explicaţie.

Fără îndoială, combinaţiile care se prezintă minţii într-un fel de iluminare subită, după o activitate inconştientă relativ prelungită, sunt în general combinaţii utile şi fecunde, care par a fi rezultatul unei prime trieri. Rezultă oare că eul subliminal, care a ghicit printr-o intuiţie fină că acele combinaţii pot fi utile, nu le-a format decât pe ele, ori a format multe altele care erau lipsite de interes şi care au rămas inconştiente ?

În acest al doilea mod de a vedea, combinaţiile s-ar forma ca urmare a automatismului eului subliminal, dar numai cele interesante ar pătrunde în câmpul conştiinţei. În virtutea cărei cauze, printre miile de combinaţii produse de activitatea noastră inconştientă, unele sunt chemate să treacă pragul, în timp ce altele rămân dincoace de el ? Oare un simplu hazard le conferă acest privilegiu ? Evident, nu ! Printre toate excitaţiile simţurilor noastre, de exemplu, numai cele mai intense ne vor reţine atenţia, afară doar dacă această atenţie nu a fost atrasă asupra lor de alte cauze. Mai general, fenomenele inconştiente privilegiate, adică susceptibile de a deveni conştiente, sunt cele care, direct sau indirect, ne afectează cel mai profund sensibilitatea.

Poate părea surprinzător faptul de a invoca sensibilitatea în legătură cu demonstraţiile matematice, care, aparent, nu pot interesa decât inteligenţa. Ar însemna atunci să uităm sentimentul frumuseţii matematice, al armoniei numerelor şi formelor, al ele-

ganţei geometrice. Este un adevărat sentiment estetic pe care adevăraţii matematicieni îl cunosc. Şi asta ţine de sensibilitate.

Or, care sunt calităţile matematice cărora le atribuim această trăsătură de frumuseţe şi de eleganţă, şi care sunt susceptibile să dezvolte în noi un fel de emoţie estetică ? Tocmai acelea ale căror elemente sunt dispuse armonios, astfel ca mintea să le poată cuprinde fără efort ansamblul şi totodată să le pătrundă detaliile. Această armonie este în acelaşi timp o satisfacţie pentru nevoile noastre estetice şi un ajutor pentru mintea pe care ea o susţine şi o călăuzeşte. Totodată, punând sub ochii noştri un întreg bine ordonat, ea ne face să presimţim o lege matematică. Or, am spus-o mai sus, singurele fapte matematice demne să ne reţină atenţia şi susceptibile de a fi utile sunt acelea care ne pot face să cunoaştem o lege matematică. Ajungem astfel la concluzia următoare : combinaţiile utile sunt tocmai cele mai frumoase, vreau să spun acelea care încântă cel mai bine acea sensibilitate specială pe care toţi matematicienii o cunosc, dar pe care profanii o ignoră, fiind chiar adesea înclinaţi s-o ironizeze.

Ce se-întâmplă deci ? Printre combinaţiile foarte numeroase pe care eul subliminal le-a format orbeşte, aproape toate sunt lipsite de interes şi de utilitate. Dar, tocmai de aceea, ele nu acţionează asupra sensibilităţii estetice. Conştiinţa nu le va cunoaşte niciodată. Numai unele dintre ele sunt armonioase şi, în consecinţă, totodată utile şi frumoase ; ele vor fi capabile să emoţioneze sensibilitatea specială a geometrului de care vorbeam şi care, o dată excitată, va atrage asupra lor atenţia noastră şi le va da astfel ocazia să devină conştiente.

Aceasta este doar o ipoteză. Iată totuşi o observaţie care ar putea s-o confirme : atunci când o iluminare subită invadează mintea matematicianului, se întâmplă cel mai adesea ca ea să nu-l înşele. Se întâmplă însă uneori, cum spuneam, şi ca ea să nu suporte proba unei verificări. Ei bine, se observă aproape mereu că acea idee falsă, dacă ar fi fost adevărată, ar fi flatat instinctul nostru natural al eleganţei matematice.

Aşadar, tocmai această sensibilitate estetică specială joacă rodul sitei fine de care vorbeam mai sus, ceea ce ne face să înţelegem îndeajuns de ce persoana căreia ea îi lipseşte nu va fi niciodată un adevărat inventator.

N-au dispărut, totuşi, toate dificultăţile. Eul conştient este strict limitat. În ce priveşte eul subliminal, nu-i cunoaştem limitele şi de aceea nu ne displace prea mult să presupunem că el a putut să formeze în puţin timp mai multe combinaţii diverse decât ar putea cuprinde toată viaţa unei fiinţe conştiente. Aceste limite există totuşi. E oare verosimil ca el să poată forma toate combinaţiile posibile al căror număr ar speria imaginaţia ? Acest lucru ar părea totuşi necesar, căci dacă n-ar produce decât o mică parte din aceste combinaţii, şi dacă ar face-o la întâmplare, ar exista puţine şanse ca buna combinaţie, cea care trebuie aleasă, să se găsească printre ele.

Poate că explicaţia ar trebui căutată în acea perioadă de activitate conştientă preliminară care precede totdeauna orice activitate inconştientă fructuoasă. Să mi se îngăduie o comparaţie grosieră. Să ne reprezentăm elementele viitoare ale combinaţiilor noastre ca pe ceva asemănător atomilor lui Epicur. În timpul repausului complet al minţii, aceşti atomi sunt imobili ; ei sunt, ca să zic aşa, agăţaţi de perete. Acest repaus complet se poate deci prelungi indefinit fără ca atomii să se întâlnească şi, în consecinţă, fără a se putea produce între ei vreo combinaţie.

Dimpotrivă, de-a lungul unei perioade de repaus aparent şi de activitate inconştientă, unii dintre ei sunt desprinşi de perete şi puşi în mişcare. Ei străbat spaţiul în toate sensurile, era să zic încăperea în care sunt închişi, cum ar putea-o face, de pildă, o droaie de musculiţe sau, dacă preferaţi o comparaţie mai savantă, cum o fac moleculele gazoase din teoria cinetică a gazelor. Şocurile lor reciproce pot atunci produce combinaţii noi.

Care ar fi rolul activităţii conştiente preliminare ? Evident, acela de a mobiliza o parte din acei atomi, de a-i desprinde de perete şi a-i pune în mişcare. Se crede că nimic bun nu s-a făcut, pentru că au fost mişcate aceste elemente în mii de feluri diverse pentru a încerca asamblarea lor, fără a se fi putut găsi una satisfăcătoare. Dar, după această agitaţie care le-a fost impusă de voinţa noastră, atomii nu revin la repausul lor iniţial. Ei îşi continuă liber dansul.

Or, voinţa noastră nu i-a ales la întâmplare. Ea a urmărit un scop perfect determinat. Atomii puşi în mişcare nu sunt deci atomi oarecare, ci tocmai aceia de la care se poate aştepta în mod rezo-

nabil soluţia căutată. Atomii puşi în mişcare vor suferi atunci şocuri, care îi vor face să intre în combinaţie, fie între ei, fie cu alţi atomi rămaşi imobili şi de care se vor fi ciocnit în cursa lor. Cer iertare, încă o dată, comparaţia mea este foarte grosieră, dar nu prea ştiu cum altfel aş putea face înţeles gândul meu.

Oricum, singurele combinaţii cu şanse de a se forma sunt acelea în care cel puţin un element provine din atomii liber aleşi de voinţa noastră. Şi este evident că printre ele se află ceea ce numeam adineauri *buna combinaţie*. Avem aici poate un mijloc de a atenua ceea ce era paradoxal în ipoteza iniţială.

Altă observaţie. Nu se întâmplă niciodată ca activitatea inconştientă să ne ofere *gata efectuat* rezultatul unui calcul ceva mai lung, în care nu avem altceva de făcut decât să aplicăm reguli fixe. S-ar putea crede că eul subliminal, absolut automat, este apt cu deosebire pentru acest gen de activitate care este oarecum exclusiv mecanic. Se pare că, gândindu-ne seara la factorii unei înmulţiri, am putea spera să găsim produsul gata făcut la trezire, sau ca un calcul algebric, o verificare, de exemplu, să se poată face inconştient. Nu e defel aşa, observaţia o dovedeşte. Tot ce se poate spera de la aceste inspiraţii, care constituie fructele activităţii inconştiente, sunt anumite puncte de plecare pentru asemenea calcule. Cât priveşte calculele înseşi, ele trebuie să fie făcute în a doua perioadă a activităţii conştiente, aceea care urmează inspiraţiei ; aceea în care se verifică rezultatele acestei inspiraţii şi în care se trag consecinţele lor. Regulile acestor calcule sunt stricte şi complicate ; ele reclamă disciplina, atenţia, voinţa şi, ca urmare, conştiinţa. Dimpotrivă, în eul subliminal domină ceea ce aş numi libertatea, dacă s-ar putea da acest nume simplei absenţe a disciplinei şi dezordinii născute din hazard. Dar însăşi această dezordine permite combinaţii neaşteptate.

Aş face o ultimă remarcă : atunci când am expus mai sus cele câteva observaţii personale, am vorbit de o noapte nedormită, în care lucram oarecum în ciuda voinţei mele. Cazurile de acest fel sunt frecvente şi nu e necesar ca activitatea cerebrală anormală să fie cauzată de un excitant fizic, precum în cazul citat. Ei bine, se pare că în aceste cazuri asişti tu însuţi la propria ta activitate inconştientă, care a devenit parţial accesibilă conştiinţei surescitate

şi care nu ţi-a schimbat astfel natura. Îţi dai atunci seama vag de deosebirile între cele două mecanisme sau, dacă vreţi, între metodele de lucru ale celor două euri. Şi observaţiile psihologice pe care le-am putut face astfel îmi par a confirma în linii generale vederile pe care le-am expus.

Fără îndoială, ele au o mare nevoie de asemenea observaţii, întrucât sunt şi rămân, orice-ar fi, ipotetice : problema e atât de interesantă încât nu regret că le-am supus atenţiei cititorului.

CAPITOLUL IV

Hazardul

1

„Cum am îndrăzni să vorbim de legile hazardului ? Hazardul nu e antiteza oricărei legi ?" Aşa se exprimă Bertrand la începutul lucrării sale *Calculul probabilităţilor*. Probabilitatea e opusă certitudinii ; e deci ceea ce se ignoră şi, în consecinţă, se pare, ceea ce nu se poate calcula. Există aici o contradicţie despre care s-a scris deja mult.

Şi mai întâi ce este hazardul ? Anticii desosebeau fenomenele ce păreau a se supune unor legi armonioase, stabilite odată pentru totdeauna, şi cele pe care le atribuiau hazardului — acelea care nu puteau fi prevăzute pentru că nu se supuneau nici unei legi. În fiecare domeniu, legile precise nu hotărau în mod absolut, ele doar trasau limitele între care era îngăduit hazardului să acţioneze. În această concepţie, cuvântul *hazard* avea un sens precis, obiectiv : ceea ce era hazard pentru unul, era hazard şi pentru altul şi chiar pentru zei.

Dar această concepţie nu mai este acum împărtăşită. Noi am devenit adepţii unui determinism absolut şi chiar cei ce vor să păstreze drepturile liberului arbitru al omului lasă ca determinismul să domine neştirbit cel puţin în lumea anorganică. Orice fenomen, oricât de mic ar fi, are o cauză ; o inteligenţă infinit de puternică, infinit de bine informată asupra legilor naturii ar fi putut să-l prevadă de la începutul veacurilor. Dacă o asemenea inteligenţă ar exista, n-am putea să jucăm cu ea nici un joc de noroc, am pierde totdeauna.

Într-adevăr, pentru ea cuvântul *hazard* n-ar avea sens, sau mai degrabă n-ar exista hazard. Doar din cauza slăbiciunii şi ignoranţei noastre ar exista hazard pentru noi. Şi chiar fără a depăşi slaba

noastră umanitate, ceea ce e hazard pentru ignorant nu mai este hazard pentru savant Hazardul nu este decât măsura ignoranţei noastre. Fenomenele fortuite sunt, prin definiţie, cele ale căror legi nu le cunoaştem.

Dar este satisfăcătoare această definiţie ? Atunci când primii păstori caldeeni urmăreau cu privirea mişcările aştrilor, ei nu cunoşteau încă legile astronomiei. S-ar fi gândit ei să spună că aştrii se mişcă la întâmplare ? Dacă un fizician modern studiază un fenomen nou, şi încă îi descoperă legea marţi, ar fi spus el luni că acest fenomen era fortuit ? Dar nu numai atât : nu se invocă adesea, pentru a prezice un fenomen, ceea ce Bertrand numeşte legile hazardului ? În teoria cinetică a gazelor, de exemplu, se regăsesc legile cunoscute ale lui Mariotte şi Gay-Lussac, graţie ipotezei că vitezele moleculelor de gaz variază neregulat, adică întâmplător. Legile observabile ar fi mult mai puţin simple, vor spune toţi fizicienii, dacă vitezele ar fi reglate de o lege elementară simplă, dacă moleculele ar fi, cum se zice, *organizate*, dacă s-ar supune unei discipline. Putem trage concluzii graţie hazardului, adică graţie ignoranţei noastre. Şi atunci, dacă cuvântul *hazard* este pur şi simplu sinonim cu ignoranţa, ce înseamnă asta ? Trebuie deci să traducem după cum urmează ?

„Îmi ceri să-ţi prezic fenomenele care se vor produce. Dacă, din nefericire aş cunoaşte legile acestor fenomene, n-aş putea reuşi acest lucru decât prin calcule foarte complicate, şi ar trebui să renunţ a-ţi răspunde, dar, cum am norocul să nu le cunosc, îţi voi răspunde imediat. Şi lucrul cel mai neobişnuit e că răspunsul meu ar fi corect".

Trebuie aşadar ca hazardul să fie altceva decât numele pe care îl dăm ignoranţei noastre ; trebuie ca printre fenomenele ale căror cauze nu le cunoaştem, să distingem fenomenele fortuite, asupra cărora calculul probabilităţilor ne va informa provizoriu, şi cele care nu sunt fortuite şi despre care nu putem spune nimic câtă vreme nu vom fi determinat legile care le guvernează. Şi chiar în ce priveşte fenomenele fortuite, e clar că informaţiile pe care ni le oferă calculul probabilităţilor nu vor înceta să fie adevărate atunci când aceste fenomene vor fi mai bine cunoscute.

Directorul unei companii de asigurări pe viaţă nu ştie când va muri fiecare dintre asiguraţii săi, dar contează pe calculul probabilităţilor şi pe legea numerelor mari şi nu se înşeală de vreme ce distribuie dividende acţionarilor săi. Aceste dividende nu ar dispărea dacă un medic foarte perspicace şi foarte indiscret ar veni, odată poliţele semnate, să-l informeze pe director despre şansele de viaţă ale asiguraţilor. Medicul ar risipi ignoranţa directorului, dar nu ar avea nici o influenţă asupra dividendelor, care, evident, nu sunt un produs al acestei ignoranţe.

2

Pentru a găsi o definiţie mai bună a hazardului, trebuie să examinăm câteva din faptele îndeobşte considerate ca fortuite, şi la care calculul probabilităţilor pare să se aplice. Vom cerceta apoi care sunt trăsăturile lor comune.

Primul exemplu pe care-l vom alege este cel al echilibrului instabil. Dacă un con se sprijină pe vârful său, ştim bine că va cădea, dar nu ştim în care parte. Ni se pare că doar hazardul va decide în această privinţă. Dacă acel con ar fi perfect simetric, dacă axa lui ar fi perfect verticală, dacă n-ar fi supus nici unei alte forţe decât greutatea, el n-ar cădea defel. Dar cea mai mică asimetrie îl va face să se încline uşor de o parte sau alta, şi din momentul în care se va înclina, oricât de puţin, va cădea cu totul în acea direcţie. Chiar dacă simetria e perfectă, o trepidaţie foarte uşoară, o adiere l-ar putea face să se încline cu câteva secunde de arc — ceea ce ar fi suficient pentru a-i determina căderea şi chiar sensul acesteia, care va fi cel al înclinaţiei iniţiale.

O cauză foarte mică şi care ne scapă determină un efect considerabil pe care este imposibil să nu-l vedem. Spunem atunci că acel efect e datorat hazardului. Dacă am cunoaşte exact legile naturii şi situaţia universului la momentul iniţial, am putea prezice exact situaţia aceluiaşi univers la un moment ulterior. Dar, chiar dacă legile naturale n-ar mai avea nici un secret pentru noi, n-am putea cunoaşte situaţia iniţială decât *aproximativ*. Dacă asta ne permite să prevedem situaţia ulterioară *cu aceeaşi aproximaţie* — e tot

ce ne trebuie — , spunem că fenomenul a fost prevăzut, că e guvernat de legi. Dar nu se întâmplă mereu aşa. E posibil ca mici diferenţe în condiţiile iniţiale să genereze foarte mari diferenţe în fenomenele finale. O mică eroare în privinţa celor dintâi va produce o eroare enormă în privinţa celor din urmă. Predicţia devine imposibilă şi avem fenomenul fortuit.

Al doilea exemplu va fi foarte asemănător cu primul. Îl împrumutăm din domeniul meteorologiei. De ce le e aşa de greu meteorologilor să prezică vremea cu oarecare certitudine ? De ce căderile de ploaie, furtunile chiar ni se par a surveni întâmplător, încât mulţi oameni găsesc cu totul firesc să se roage pentru a avea ploaie sau timp frumos, dar ar considera ridicol să se roage pentru o eclipsă ? Vedem că marile perturbaţii se produc în general în regiunile unde atmosfera se află în echilibru instabil. Meteorologii observă bine că acest echilibru este instabil, că se va produce undeva un ciclon. Dar unde anume, ei nu sunt în stare s-o spună. O zecime de grad în plus sau în minus într-un punct oarecare face ca ciclonul să izbucnească aici şi nu acolo, să-şi extindă ravagiile asupra unor zone pe care altfel le-ar fi cruţat. Dacă am fi cunoscut această zecime de grad, am fi putut prezice fenomenul, dar observaţiile nu erau nici atât de sistematice, nici atât de precise, şi tocmai de aceea totul pare datorat intervenţiei hazardului. Regăsim şi aici acelaşi contrast între o cauză minimă, care scapă observatorului, şi efecte considerabile, care sunt uneori dezastre îngrozitoare.

Să trecem la un alt exemplu, distribuţia pe zodiac a micilor planete. Longitudinile lor iniţiale au putut fi oarecare ; dar mişcările lor medii sunt diferite şi apoi ele se deplasează de atâta vreme încât se poate spune că actualmente sunt distribuite *la întâmplare* de-a lungul zodiacului. Foarte mici diferenţe iniţiale între distanţele lor faţă de soare sau — ceea ce semnifică acelaşi lucru — între mişcările lor medii au sfârşit prin a genera diferenţe enorme între longitudinile lor actuale. Un plus de o miime de secundă în mişcarea medie diurnă ar da o secundă în trei ani, un grad în zece mii de ani, o circumferinţă întreagă în trei sau patru milioane de ani ; — şi ce înseamnă asta pe lângă timpul care s-a scurs de când micile planete s-au desprins din nebuloasa lui

Laplace ? Iată deci încă o dată o cauză mică şi un efect mare ; sau, mai bine zis, mici diferenţe în cauză şi mari diferenţe în efect.

Jocul de ruletă ne îndepărtează mai puţin decât se pare de exemplul precedent. Să presupunem un indicator pe care îl putem face să se rotească în jocul unui pivot, pe un cadran împărţit în 100 de sectoare alternativ roşii şi negre. Dacă se opreşte pe un sector roşu, partida e câştigată, dacă nu e pierdută. Totul depinde, evident, de impulsul iniţial pe care îl dăm indicatorului. Acesta se va roti, presupun, de 10 sau de 20 de ori, dar se va opri mai devreme sau mai târziu, funcţie de forţa cu care îl voi fi împins. E de ajuns însă ca impulsul să varieze cu o miime sau cu două miimi, ca indicatorul meu să se oprească pe un sector care e negru, sau pe sectorul următor care e roşu. E vorba aici de diferenţe pe care simţul muscular nu le poate evalua şi care ar scăpa chiar unor instrumente mai fine. Îmi e deci cu neputinţă să prevăd ce va face indicatorul pe care l-am pus în mişcare, şi de aceea îmi bate inima şi aştept totul de la hazard. Diferenţa în discuţie este imperceptibilă, iar diferenţa în efect este pentru mine de cea mai mare importanţă, întrucât e aici în joc toată miza mea.

3

Să mi se îngăduie în această privinţă o reflecţie puţin străină de subiectul meu. Un filosof a spus acum câţiva ani că viitorul e determinat de trecut, iar că trecutul nu e determinat de viitor ; sau, cu alte cuvinte, că din cunoaşterea prezentului am putea-o deduce pe cea a viitorului, dar nu pe cea a trecutului ; pentru că, spunea el, o cauză nu poate produce decât un efect, în timp ce un acelaşi efect poate fi produs de mai multe cauze diferite. E clar că nici un savant nu poate subscrie la această concluzie ; legile naturii leagă antecedentul de consecvent astfel încât antecedentul e determinat de consecvent la fel cum consecventul e determinat de antecedent. Dar care să fi fost originea erorii acelui filosof ? Ştim că, în virtutea principiului lui Carnot, fenomenele fizice sunt inevitabile şi că lumea tinde spre uniformitate. Atunci când două corpuri de temperaturi diferite sunt în contact, corpul mai cald cedează căldura

celui mai rece. Putem deci prevedea că temperaturile se vor egaliza. Dar odată ce temperaturile vor fi devenit egale, dacă suntem întrebaţi cu privire la starea anterioară, ce-am putea răspunde ? Am spune că unul dintre corpuri era cald şi celălalt rece, dar n-am putea ghici care dintre cele două a fost înainte cel mai cald.

Şi totuşi, în realitate, temperaturile nu ajung niciodată la egalitate perfectă. Diferenţa temperaturilor tinde spre zero doar în mod asimptotic. Survine atunci un moment în care termometrele noastre nu o mai pot decela. Dar dacă am avea termometre de o mie de ori, de o sută de mii de ori mai sensibile, am recunoaşte că subzistă încă o mică diferenţă, şi că unul dintre corpuri a rămas puţin mai cald decât celălalt. Şi atunci am putea afirma că el a fost altădată mult mai cald decât celălalt.

Contrar a ceea ce am văzut din exemplele precedente, aici avem de-a face cu diferenţe mari în cauză şi diferenţe mici în efect. Flammarion imaginase cândva un observator care s-ar îndepărta de Pământ cu o viteză mai mare decât viteza luminii ; pentru el timpul şi-ar schimba semnul. Istoria ar fi inversată, şi Waterloo ar precede Austerlitz. Ei bine, pentru acel observator, efectele şi cauzele ar fi intervertite ; echilibrul instabil n-ar mai fi excepţia ; datorită ireversibilităţii universale, totul i s-ar părea că provine dintr-un fel de haos în echilibru instabil ; natura întreagă i-ar apărea ca abandonată hazardului.

4

Iată acum alte exemple în care vom vedea apărând trăsături puţin diferite. Să considerăm mai întâi teoria cinetică a gazelor. Cum trebuie să ne reprezentăm un recipient umplut cu gaz ? Nenumărate molecule, mişcându-se cu viteze mari, brăzdează recipientul în toate sensurile ; în fiecare moment ele lovesc pereţii sau se ciocnesc între ele ; şi aceste şocuri au loc în condiţiile cele mai diverse. Ceea ce ne frapează aici cu deosebire nu e micimea cauzelor, ci complexitatea lor. Şi totuşi, primul element se regăseşte şi aici şi joacă un rol important. Dacă o moleculă ar fi deviată spre stânga sau spre dreapta traiectoriei sale, cu o cantitate

foarte mică, comparabilă cu raza de acţiune a moleculelor de gaz, ea ar evita un şoc, sau l-ar suferi în condiţii diferite — ceea ce ar face ca direcţia vitezei sale după şoc să varieze poate cu 90° sau cu 180°.

Şi asta nu e totul. E de-ajuns, după cum am văzut, să deviem molecula înainte de şoc cu o cantitate infinit mică, pentru ca ea să fie deviată, după şoc, cu o cantitate finită. Dacă moleculele suferă două şocuri succesive, ar fi de-ajuns s-o deviem, înainte de primul şoc, cu o cantitate infinit mică de ordinul al doilea, pentru ca ea să fie deviată după primul şoc, cu o cantitate infinit mică de ordinul întâi şi după al doilea şoc, cu o cantitate finită. Şi molecula nu va suferi numai două şocuri, ci un foarte mare număr de şocuri pe secundă. Astfel că, dacă primul şoc a multiplicat devierea cu un foarte mare număr A, după n şocuri, ea va fi multiplicată cu A^n ; va fi devenit deci foarte mare, nu numai pentru că A este mare, adică pentru că micile cauze produc efecte mari, dar şi pentru că exponentul n este mare, adică pentru că şocurile sunt foarte numeroase şi cauzele sunt foarte complexe.

Să trecem la un al doilea exemplu. De ce, într-o aversă, picăturile de ploaie ni se par distribuite la întâmplare ? Tot datorită complexităţii cauzelor care determină formarea lor. S-au răspândit ioni în atmosferă, multă vreme ei au fost supuşi unor curenţi de aer mereu schimbători, au fost antrenaţi în vârtejuri de foarte mici dimensiuni, încât distribuţia lor finală nu mai are nici o legătură cu distribuţia lor iniţială. Temperatura scade brusc, vaporii se condensează şi fiecare ion devine centrul unei picături de ploaie. Pentru a şti care va fi distribuţia acestor picături şi câte vor cădea pe fiecare pavea, n-ar fi suficient să cunoaştem situaţia iniţială a ionilor, ar trebui să calculăm efectul a mii de curenţi de aer minusculi şi capricioşi.

Acelaşi lucru se întâmplă dacă punem particule de praf în suspensie în apă. Vasul e străbătut de curenţi a căror lege n-o cunoaştem, ştim doar că ea este foarte complicată. După un anumit interval de timp particulele se vor distribui la întâmplare, adică uniform, în vas, tocmai datorită complexităţii acestor curenţi. Dacă ele s-ar supune unor legi simple, dacă, de pildă, vasul s-ar roti şi

curenţii ar circula în josul axei vasului descriind cercuri, altfel ar sta lucrurile, pentru că fiecare particulă şi-ar conserva înălţimea iniţială şi distanţa iniţială faţă de axă.

La acelaşi rezultat s-ar ajunge în cazul amestecului a două lichide sau a două pulberi de particule fine. Şi ca să luăm un exemplu mai grosier, acelaşi lucru se întâmplă când amestecăm cărţile de joc. Cu fiecare amestec, cărţile suferă o permutare (asemănătoare cu cea care e studiată în teoria substituţiilor). Care anume se va realiza ? Probabilitatea de a se realiza o anumită permutare (bunăoară aceea care aduce la rangul n cartea care ocupa rangul $\varphi(n)$ înainte de permutare), această probabilitate, spun, depinde de obişnuinţele jucătorului. Dar dacă jucătorul bate cărţile îndelung, ar exista un mare număr de permutări succesive ; şi ordinea finală care va rezulta de aici nu va mai fi guvernată decât de hazard. Vreau să spun că toate ordinile posibile vor fi la fel de probabile. Acest rezultat se datorează numărului mare de permutări succesive, adică complexităţii fenomenului.

Câteva cuvinte, în sfârşit, despre teoria erorilor. Aici cauzele sunt complexe şi multiple. La câte capcane se expune observatorul, chiar cu cel mai bun instrument ! El trebuie să încerce să le descopere pe cele mai mari şi să le evite. Dar atunci când le-a eliminat, admiţând că reuşeşte, rămân multe erori mici, dar care, acumulând efectele lor, pot deveni periculoase. De aici provin erorile accidentale. Noi le atribuim hazardului deoarece cauzele lor sunt prea complicate şi prea numeroase. Şi de data aceasta avem de-a face doar cu nişte cauze mici ; fiecare dintre ele va produce doar un efect mic, dar efectele lor devin redutabile prin unirea şi numărul lor.

5

Ne putem situa şi într-un al treilea punct de vedere, mai puţin important decât primele două şi asupra căruia voi insista mai puţin. Când încerci să prevezi un fapt şi îi examinezi antecedentele, te străduieşti să te informezi asupra situaţiei anterioare. Dar n-o poţi face pentru toate părţile universului, te mulţumeşti să ştii ce

se petrece în vecinătatea punctului unde trebuie să se producă faptul, sau ceea ce pare a avea oarecare legătură cu acel fapt. O cercetare nu poate fi completă, trebuie să ştii să alegi. Se poate însă întâmpla să fi lăsat de-o parte împrejurări care, la început, păreau complet străine de faptul prevăzut, când nu ne-am fi gândit niciodată să le atribuim vreo influenţă şi care, totuşi, împotriva oricărei previziuni, se întâmplă să joace un rol important.

Un om trece pe stradă mergând la treburile sale. Cineva care ar fi fost la curent cu acele treburi ar putea spune motivul pentru care a plecat la o anumită oră, de ce a trecut pe o anumită stradă. Pe acoperiş lucrează un ţiglar. Antreprenorul care se foloseşte de el ar putea prevedea, într-o anumită măsură, ce va face. Dar omul nu se gândeşte la ţiglar, nici ţiglarul la om : ei par a aparţine la două lumi complet străine una de alta. Şi totuşi, ţiglarul scapă un olan care îl ucide pe trecător. Nu vom ezita să spunem că e vorba aici de o întâmplare.

Slăbiciunea noastră nu ne îngăduie să cuprindem universul întreg şi ne obligă să-l tăiem în felii. Noi încercăm s-o facem cât se poate de puţin artificial, şi totuşi, se întâmplă, din când în când, ca două din aceste felii să reacţioneze una asupra celeilalte. Efectele acestei acţiuni reciproce ni se par atunci datorate hazardului.

Este oare acesta un al treilea mod de a concepe hazardul ? Nu totdeauna. Într-adevăr, în majoritatea cazurilor avem de-a face cu primul sau cu al doilea. Ori de câte ori două lumi, în general străine una de alta, se întâmplă să reacţioneze una asupra celeilalte, legile acestei reacţii nu pot fi decât foarte complexe, şi, pe de altă parte, ar fi suficientă o foarte mică schimbare în condiţiile iniţiale ale acestor două lumi pentru ca reacţia să nu se fi produs.

Cât de puţin a lipsit ca omul să treacă o secundă mai târziu, sau ca ţiglarului să-i scape olanul o secundă mai devreme !

6

Tot ce am spus până acum nu ne explică încă de ce hazardul se supune unor legi. E oare suficientă micimea cauzelor, sau complexitatea lor, ca să putem prevedea, dacă nu care sunt efectele lor

în fiecare caz, cel puţin care vor fi aceste efecte *ca medie* ? Pentru a răspunde la această întrebare, cel mai bine este să reluăm unele din exemplele citate mai sus.

Aş începe cu exemplul ruletei. Am spus că punctul în care se va opri indicatorul depinde de impulsul iniţial care îi este dat. Care este probabilitatea ca acest impuls să aibă o valoare sau alta ? Nu ştiu nimic despre aşa ceva, dar mi-e greu să nu admit că această probabilitate este reprezentată de o funcţie analitică continuă. Probabilitatea ca impulsul să fie cuprins între a şi $a + \varepsilon$ va fi atunci sensibil egală cu probabilitatea ca ea să fie cuprinsă între $a + \varepsilon$ şi $a + 2\varepsilon$ *cu condiţia ca* ε *să fie foarte mic.* Aceasta este o proprietate comună tuturor funcţiilor analitice.Variaţiile mici ale funcţiei sunt proporţionale cu variaţiile mici ale variabilei.

Dar, aşa cum am presupus, o variaţie foarte mică a impulsului e suficientă pentru a schimba culoarea sectorului în faţa căruia se va opri indicatorul. De la a la $a + \varepsilon$ este roşul ; de la $a + \varepsilon$ la $a + 2\varepsilon$ este negrul. Probabilitatea fiecărui sector roşu este deci aceeaşi cu cea a sectorului negru următor şi, în consecinţă, probabilitatea totală a roşului e egală cu probabilitatea totală a negrului.

Data problemei este funcţia analitică ce reprezintă probabilitatea unui impuls iniţial determinat. Dar teorema rămâne adevărată, oricare ar fi această dată, pentru că depinde de o proprietate comună tuturor funcţiilor analitice. Rezultă de aici că în cele din urmă nu mai avem nici o nevoie de dată.

Ceea ce am spus referitor la cazul ruletei se aplică şi la exemplul micilor planete. Zodiacul poate fi privit ca o imensă ruletă pe care creatorul a lansat un foarte mare număr de mici bile cărora le-a transmis impulsuri iniţiale diverse, variind după o lege oarecare. Distribuţia lor actuală este uniformă şi independentă de această lege, pentru acelaşi motiv ca în cazul precedent. Se vede astfel de ce fenomenele se supun legilor hazardului atunci când mici diferenţe privind cauzele sunt suficiente pentru a antrena diferenţe mari în efecte. Posibilităţile acestor mici diferenţe pot fi atunci privite ca proporţionale cu înseşi aceste diferenţe, tocmai pentru că diferenţele sunt mici şi creşterile mici ale unei funcţii continue sunt proporţionale cu cele ale variabilei.

Să trecem la un exemplu complet diferit, în care intervine mai ales complexitatea cauzelor. Presupun că un jucător amestecă un pachet de cărţi. La fiecare amestec el inversează ordinea cărţilor şi le poate inversa în mai multe feluri. Pentru a simplifica expunerea, să presupunem numai trei cărţi. Cărţile care, înainte de a fi amestecate, ocupau respectiv rangurile 123, vor putea, după ce au fost amestecate, să ocupe rangurile 123, 231, 312, 321, 132, 213.

Fiecare dintre aceste şase ipoteze e posibilă şi ele au, respectiv, ca probabilităţi :

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.$$

Suma acestor şase numere este egală cu 1. Dar asta-i tot ce ştim. Cele şase probabilităţi depind fireşte de obişnuinţele jucătorului, pe care nu le cunoaştem.

La o a doua amestecare a cărţilor şi la următoarele, fenomenul se va repeta, şi în aceleaşi condiţii. Vreau să spun că p_4, de exemplu, reprezintă totdeauna probabilitatea ca cele trei cărţi care ocupau după a n-a amestecare şi înainte de a $n + 1$ rangurile 123, ca aceste trei cărţi, spun, să ocupe rangurile 321 după a n-a amestecare. Şi acest lucru rămâne adevărat, oricare ar fi numărul n, pentru că obişnuinţele jucătorului, felul în care amestecă el cărţile rămân aceleaşi.

Dar dacă numărul amestecărilor este foarte mare, cărţile care, înainte de prima amestecare, ocupau rangurile 123, ar putea, după ultima amestecare, să ocupe rangurile

123, 231, 312, 321, 132, 213

şi probabilitatea acestor şase ipoteze ar fi sensibil aceeaşi şi egală cu 1/6 ; acest lucru ar fi adevărat oricare ar fi numerele $p_1 \ldots p_6$ pe care nu le cunoaştem. Numărul mare al amestecărilor, adică complexitatea cauzelor, a produs uniformitatea.

Aceasta s-ar explica întocmai dacă ar exista mai mult de trei cărţi, dar, chiar şi cu trei cărţi demonstraţia ar fi complicată. Mă voi mulţumi s-o dau numai pentru două cărţi. Nu mai avem decât două ipoteze :

12, 21

cu posibilităţile p_1 şi $p_2 = 1 - p_1$. Să presupunem n amestecări şi să presupunem că, în cazul în care cărţile regăsesc în final ordinea iniţială, câştig un franc, şi că pierd un franc dacă ele sunt finalmente inversate.

Speranţa mea matematică ar fi atunci :

$$(p_1 - p_2)^n.$$

Diferenţa $p_1 - p_2$ e cu siguranţă mai mică decât 1 ; astfel că dacă n este foarte mare, speranţa mea va fi nulă. Nu avem nevoie să cunoaştem valoarea lui p_1 şi p_2 pentru a şti că jocul este echitabil.

Ar exista totuşi o excepţie, dacă unul din numerele p_1 şi p_2 ar fi egal cu 1 şi celălalt nul. *Jocul n-ar mai fi atunci echitabil, pentru că ipotezele noastre iniţiale ar fi prea simple.*

Observaţia noastră nu se aplică numai amestecului cărţilor, ci tuturor amestecurilor, celor ale pulberilor şi lichidelor ; şi chiar amestecurilor moleculelor de gaz din teoria cinetică a gazelor. Ca să revenim la această teorie, să presupunem pentru o clipă un gaz ale cărui molecule nu se pot ciocni între ele, dar pot fi deviate graţie ciocnirilor de pereţii vasului în care este închis gazul. Dacă forma vasului e suficient de complicată, distribuţia moleculelor şi cea a vitezelor nu vor întârzia să devină uniforme, ceea ce nu s-ar mai întâmpla dacă vasul e sferic sau are forma unui paralelipiped dreptunghic. De ce ? Pentru că, în primul caz, distanţa de la centru la o traiectorie oarecare ar rămâne constantă ; în al doilea caz, aceasta ar fi valoarea absolută a unghiului fiecărei traiectorii cu feţele paralelipipedului.

Se vede astfel ce trebuie să înţelegem prin condiţii *prea simple* — acelea care conservă ceva, care lasă să subziste un invariant. Ecuaţiile diferenţiale ale problemei sunt oare prea simple ca să putem aplica legile hazardului ? Această întrebare pare, la început, lipsită de un sens precis. Acum ştim ce vrea să zică. Ele sunt prea simple dacă conservă ceva, dacă admit o integrală uniformă ; dacă ceva din condiţiile iniţiale rămâne neschimbat, e clar că situaţia finală n-ar mai putea fi independentă de situaţia iniţială.

Să ne întoarcem la teoria erorilor. Nu ştim cui se datorează erorile accidentale. Şi tocmai de aceea ştim că ele se vor supune legii

lui Gauss. Acesta e paradoxul. El se explică aproape la fel ca în cazurile precedente. N-avem nevoie să ştim decât un singur lucru : că erorile sunt foarte numeroase, că sunt foarte mici, că fiecare din ele poate fi atât negativă cât şi pozitivă. Care este curba de probabilitate a fiecăreia ? Nu ştim nimic, presupunem doar că această curbă este simetrică. Se demonstrează atunci că eroarea rezultantă va urma legea lui Gauss şi această lege rezultantă este independentă de legile particulare pe care nu le cunoaştem. Şi aici simplitatea rezultatului este generată de caracterul complicat al datelor.

7

N-am terminat însă cu paradoxele. Am reluat adineauri ficţiunea lui Flammarion, aceea a omului care se deplasează mai repede decât lumina şi pentru care timpul şi-a schimbat semnul. Spuneam că pentru el toate fenomenele ar părea datorate hazardului. Acest lucru e adevărat dintr-un anumit punct de vedere, şi totuşi, toate aceste fenomene la un moment dat nu vor fi distribuite conform legilor hazardului, pentru că vor fi distribuite ca pentru noi, care văzându-le a se desfăşura armonios şi fără să se nască dintr-un haos iniţial, nu le privim ca reglate de hazard.

Ce vrea să spună asta ? Pentru Lumen, omul lui Flammarion, cauze mici par a produce efecte mari. De ce lucrurile nu se petrec ca pentru noi atunci când credem că vedem efecte mari datorate unor cauze mici ? N-ar fi aplicabil în cazul său acelaşi raţionament ?

Să revenim asupra acestui raţionament : când diferenţe mici în cauze generează diferenţe mari în efecte, de ce aceste efecte sunt distribuite după legile hazardului ? Presupun că o diferenţă de un milimetru în cauză produce o diferenţă de un kilometru în efect. Dacă trebuie să câştig în cazul în care efectul ar corespunde unui kilometru cu număr par, probabilitatea mea de a le câştiga ar fi ½. De ce ? Întrucât trebuie pentru aceasta ca acea cauză să corespundă unui milimetru cu număr par. Or, după toate aparenţele, probabilitatea ca o cauză să varieze între anumite limite va fi proporţională cu distanţa faţă de aceste limite, cu condiţia ca distanţa să fie foarte

mică. Dacă nu s-ar admite această ipoteză, n-am mai avea nici un mijloc de a reprezenta posibilitatea printr-o funcţie continuă.

Ce s-ar întâmpla acum când cauze mari ar produce efecte mici ? Acesta este cazul în care n-am atribui fenomenul hazardului şi în care Lumen, dimpotrivă, l-ar atribui hazardului. Unei diferenţe de un kilometru în cauză i-ar corespunde o diferenţă de un milimetru în efect. Probabilitatea ca acea cauză să fie cuprinsă între două limite la o distanţă de *n* kilometri ar mai fi proporţională cu *n* ? Nu avem nici un motiv s-o presupunem, pentru că această distanţă de *n* kilometri este mare. Dar probabilitatea ca efectul să rămână cuprins între două limite la o distanţă de *n* milimetri ar fi exact aceeaşi, adică n-ar fi proporţională cu *n*, cu toate că această distanţă de *n* milimetri este mică. Aşadar, nu ne putem reprezenta legea de probabilitate a efectelor printr-o curbă continuă. Să ne înţelegem bine, această curbă ar putea rămâne continuă în sensul analitic al cuvântului, unor variaţii *infinit mici* ale abscisei le-ar corespunde variaţii infinit mici ale ordonatei. *Practic* însă ea nu ar fi continuă pentru că unor variaţii *foarte mici* ale abscisei nu le-ar corespunde variaţii foarte mici ale ordonatei. Iată ce vreau să zic : ar fi imposibil să trasăm curba cu un creion obişnuit.

Ce concluzie trebuie să tragem ? Lumen nu are dreptul să spună că probabilitatea cauzei (cea a cauzei *sale*, care pentru noi este efectul nostru) trebuie cu necesitate să fie reprezentată printr-o funcţie continuă. Dar atunci noi de ce avem acest drept ? Pentru că acea stare de echilibru instabil, pe care o numeam adineauri iniţială, nu este ea însăşi decât punctul de sosire al unei lungi istorii anterioare. Pe parcursul acestei istorii au acţionat, îndelung, cauze complexe : ele au contribuit la efectuarea amestecului elementelor şi au tins să uniformizeze totul, cel puţin într-un spaţiu restrâns. Ele au rotunjit unghiurile, au nivelat munţii şi au astupat văile. Oricât de capricioasă şi neregulată a putut fi curba iniţială atribuită lor, ele au regularizat-o într-atât încât ne vor oferi în cele din urmă o curbă continuă. Şi tocmai de aceea putem admite continuitatea ei cu toată încrederea.

Lumen n-ar avea aceleaşi motive să conchidă astfel. Cauzele complexe nu i-ar apărea a fi agenţi de regularitate şi nivelare, dimpotrivă, ele n-ar crea decât diferenţiere şi inegalitate. El ar vedea

născându-se dintr-un fel de haos iniţial o lume din ce în ce mai variată. Schimbările pe care le-ar observa ar fi pentru el neprevăzute şi imprevizibile. I-ar apărea datorată nu ştiu cărui capriciu. Dar acel capriciu ar fi cu totul altceva decât hazardul nostru, pentru că el ar fi rebel la orice lege, în timp ce hazardul nostru mai are legile lui. Toate aceste puncte ar cere lungi dezvoltări, care ne-ar ajuta poate să înţelegem mai bine ireversibilitatea universului.

8

Am încercat să definim hazardul. Se cuvine acum să punem o întrebare. Fiind astfel definit în măsura în care poate fi definit, hazardul are un caracter obiectiv ?

Ne putem întreba. Vorbeam de cauze foarte mici sau foarte complexe. Dar ceea ce e foarte mic pentru unul nu poate fi mare pentru altul, şi ceea ce pare foarte complex unuia nu poate părea simplu altuia ? În parte am răspuns deja, pentru că am spus mai înainte cu precizie în care caz ecuaţiile diferenţiale devin prea simple pentru ca legile hazardului să rămână aplicabile. Dar lucrul merită să fie examinat mai îndeaproape, căci putem adopta şi alte puncte de vedere.

Ce înseamnă expresia *foarte mic* ? Ca s-o înţelegem e de-ajuns să ne reamintim ce spuneam mai sus. O diferenţă este foarte mică, un interval este foarte mic atunci când, în limitele acelui interval, probabilitatea rămâne sensibil constantă. De ce această probabilitate poate fi socotită constantă într-un interval mic ? Pentru că admitem că legea de probabilitate este reprezentată printr-o curbă continuă. Şi nu continuă doar în sensul analitic al cuvântului, ci *practic* continuă, cum explicam mai sus. Aceasta înseamnă nu numai că ea nu va prezenta un hiatus absolut, ci şi că nu va comporta urcări şi căderi prea stridente sau prea accentuate.

Ce ne dă dreptul să facem această ipoteză ? Am spus-o mai sus, faptul că, de la începutul veacurilor, există cauze complexe care acţionează necontenit în acelaşi sens şi care fac în mod constant ca lumea să tindă spre uniformitate fără a se putea întoarce vreodată

înapoi. Tocmai aceste cauze au dărâmat treptat vârfurile şi au umplut golurile. Pentru acest motiv curbele noastre de probabilitate nu mai prezintă decât ondulaţii lente. În miliarde de miliarde de secole se va fi făcut încă un pas spre uniformitate şi aceste ondulaţii vor fi devenit de zece ori încă mai lente : raza de curbură medie a curbei noastre va fi crescut de zece ori. Şi atunci, o lungime care nouă ni se pare azi foarte mică, pentru că pe curba noastră un arc de acea lungime nu poate fi considerat rectiliniu, ar trebui dimpotrivă să fie calificată drept foarte mică la acea epocă, deoarece curbura va fi devenit de zece ori mai mică, iar un arc de această lungime ar putea fi vădit asimilat cu o dreaptă.

Expresia *foarte mic* rămâne astfel relativă. Dar ea nu e relativă la un om sau altul, e relativă la starea actuală a lumii. Ea îşi va schimba sensul atunci când lumea va fi devenit mai uniformă, când lucrurile se vor fi amestecat şi mai mult. Dar atunci fără îndoială oamenii nu vor mai putea trăi şi vor trebui să facă loc altor fiinţe. Trebuie să spun mult mai mici sau mult mai mari ? Aşadar criteriul nostru, rămânând adevărat pentru toţi oamenii, păstrează un sens obiectiv.

Pe de altă parte, ce vrea să spună expresia *foarte complex* ? Am dat deja o soluţie — cea amintită la începutul acestui paragraf — , dar există şi altele. După cum spuneam, cauzele complexe produc un amestec din ce în ce mai intim, dar după cât timp ne va satisface acest amestec ? Când se vor fi acumulat suficiente complicaţii ? Când vom fi amestecat îndeajuns cărţile ? Dacă amestecăm două pulberi, una albastră şi cealaltă albă, la un moment dat culoarea amestecului ne va părea uniformă. Acest lucru se datorează infirmităţii simţurilor noastre. Culoarea va fi uniformă pentru presbit, care e obligat să privească de departe, atunci când nu va fi încă uniformă pentru miop. Şi când va fi devenit uniformă pentru toţi observatorii, limita ar putea fi coborâtă şi mai jos prin întrebuinţarea instrumentelor. Nimeni nu va putea distinge vreodată varietatea infinită care, dacă teoria cinetică e adevărată, se ascunde sub aparenţa uniformă a unui gaz. Şi totuşi, dacă adoptăm ideile lui Gony privind mişcarea browniană, microscopul nu pare a fi pe punctul de a ne arăta ceva asemănător ?

Acest nou criteriu este deci relativ ca şi primul, şi dacă păstrează un caracter obiectiv, este pentru că toţi oamenii au aproximativ aceleaşi simţuri, pentru că puterea instrumentelor este limitată şi pentru că nu se folosesc de ele decât în mod excepţional.

9

Acelaşi lucru e valabil şi în ştiinţele morale şi mai ales în istorie. Istoricul este obligat să efectueze o alegere printre evenimentele epocii pe care o studiază. El nu le povesteşte decât pe acelea care i se par cele mai importante. El s-a mulţumit deci să relateze evenimentele cele mai însemnate din secolul al XVI-lea, de exemplu, şi faptele remarcabile din secolul al XVII-lea. Dacă primele sunt suficiente pentru a le explica pe cele din urmă, se spune că acestea sunt conforme legilor istoriei. Dar dacă un mare eveniment din secolul al XVII-lea admite drept cauză un fapt mărunt din secolul al XVI-lea, pe care nici o istorie nu-l relatează, pe care toată lumea l-a neglijat, atunci se spune că acel eveniment e datorat hazardului. Acest cuvânt are deci acelaşi sens ca în ştiinţele fizice : cauze mici au produs efecte mari.

Cel mai mare hazard este naşterea unui om mare. Doar din întâmplare s-au întâlnit două celule genitale, de sex diferit, care conţineau exact, fiecare de partea ei, elementele misterioase a căror reacţie reciprocă avea să producă geniul. Vom fi de acord că aceste elemente trebuie să fie rare şi că întâlnirea lor e şi mai rară. Că puţin ar fi trebuit pentru a devia din calea lui spermatozoidul care le purta. Ar fi fost de-ajuns să fie deviat cu o zecime de milimetru şi Napoleon nu se năştea, iar destinele unui întreg continent erau diferite. Nici un alt exemplu nu ne poate face să înţelegem mai bine adevăratele proprietăţi ale hazardului.

Încă un cuvânt despre paradoxele cărora le-a dat naştere aplicarea calculului probabilităţilor în ştiinţele morale. S-a demonstrat că nici o Cameră nu va conţine niciodată nici un deputat al opoziţiei, sau cel puţin un atare eveniment ar fi atât de improbabil, încât am putea să pariem fără teamă contrariul, să pariem un milion contra unui bănuţ. Condorcet s-a străduit să calculeze de

câţi juraţi ar fi nevoie pentru ca o eroare judiciară să devină practic imposibilă. Dacă am fi utilizat rezultatele acestui calcul, ne-am fi expus cu siguranţă aceloraşi decepţii ca în cazul parierii pe încrederea în calculul că opoziţia n-ar avea niciodată nici un reprezentant.

Legile hazardului nu se aplică la aceste probleme. Dacă justiţia nu se decide totdeauna prin argumente suficiente, ea se foloseşte mai puţin decât se crede de metoda lui Bridoye ; e poate supărător, pentru că atunci sistemul lui Condorcet ne-ar pune la adăpost de erorile judiciare.

Ce putem spune ? Suntem ispitiţi să atribuim hazardului faptele de această natură întrucât cauzele lor sunt obscure. Dar nu acesta este adevăratul hazard. Cauzele ne sunt necunoscute, e adevărat, şi chiar complexe, dar nu îndeajuns, deoarece conservă ceva. Am văzut că tocmai asta distinge cauzele „prea simple". Când oamenii sunt apropiaţi, ei nu mai iau decizii la întâmplare şi independent unii de alţii. Ei reacţionează unii asupra celorlalţi. Cauze multiple intră în acţiune, îi tulbură pe oameni, îi antrenează la dreapta şi la stânga, dar există un lucru pe care ele nu-l pot distruge, obişnuinţele lor de oi ale lui Panurge. Şi asta se conservă.

10

Aplicarea calculului probabilităţilor în ştiinţele exacte atrage după sine multe dificultăţi. De ce zecimalele unei table de logaritmi, de ce zecimalele numărului π sunt distribuite conform legilor hazardului ? Am studiat deja în altă parte chestiunea în ce priveşte logaritmii, ceea ce s-a dovedit a fi uşor. E clar că o diferenţă mică privind argumentul va da o diferenţă mică privind logaritmul, dar o diferenţă mare privind a şasea zecimală a logaritmului. Regăsim mereu acelaşi criteriu. Dar pentru numărul π, lucrul prezintă mai multe dificultăţi şi deocamdată nu am nimic bun de spus.

Ar fi multe alte chestiuni de ridicat, şi aş vrea să le abordez înainte de a o fi rezolvat pe cea pe care mi-o propusesem mai special. Când constatăm un rezultat simplu, când găsim un număr rotund, de exemplu, spunem că un asemenea rezultat nu poate fi

datorat hazardului şi încercăm să-l explicăm printr-o cauză nefortuită. Într-adevăr, nu există decât o foarte slabă probabilitate pentru ca între 10 000 de numere, hazardul să aducă un număr rotund, numărul 10 000, de pildă. Există o şansă din 10 000. Dar există tot o şansă din 10 000 ca el să aducă orice alt număr. Şi totuşi acest rezultat nu ne-ar mira şi nu ne-ar displace să-l atribuim hazardului ; şi aceasta doar pentru că el ar fi mai puţin frapant.

E oare aici din partea noastră o simplă iluzie, ori există cazuri în care acest fel de a vedea este legitim ? Trebuie s-o sperăm, căci fără aşa ceva orice ştiinţă ar fi imposibilă. Atunci când vrem să controlăm o ipoteză, ce anume facem ? Nu putem verifica toate consecinţele ei, pentru că acestea ar fi în număr infinit. Ne mulţumim să verificăm doar unele consecinţe şi, dacă reuşim, declarăm ipoteza confirmată, căci un succes atât de mare nu s-ar putea datora hazardului. Şi în fond avem de-a face mereu cu acelaşi raţionament.

Eu nu-l pot justifica aici complet, aceasta mi-ar lua prea mult timp. Dar pot spune cel puţin că ne aflăm în prezenţa a două ipoteze, fie o cauză simplă, fie acel ansamblu de cauze complexe pe care îl numim hazard. Găsim natural să admitem că prima trebuie să producă un rezultat simplu, şi atunci, dacă constatăm acest rezultat simplu, numărul rotund de exemplu, ni se pare mai verosimil să-l atribuim cauzei simple care trebuia să ni-l dea aproape sigur, decât hazardului care nu ni-l putea da decât cu o probabilitate de unu la 10 000. N-ar mai fi la fel dacă constatăm un rezultat care nu e simplu. Nici hazardul, e adevărat, nu ni l-ar putea aduce cu o probabilitate mai mare de unu la 10 000. Dar cauza simplă nu are mai multe şanse de a-l produce.

CARTEA A DOUA

Raţionamentul matematic

CAPITOLUL I

Relativitatea spaţiului

1

E imposibil să ne reprezentăm spaţiul vid ; toate eforturile noastre de a imagina un spaţiu pur, din care ar fi excluse imaginile schimbătoare ale obiectelor materiale, nu pot ajunge decât la o reprezentare în care suprafeţele intens colorate, de pildă, sunt înlocuite cu linii slab colorate şi nu s-ar putea merge până la capăt pe această cale fără ca totul să se şteargă şi să se ajungă la neant. De aici provine relativitatea ireductibilă a spaţiului.

Cel ce vorbeşte de spaţiul absolut întrebuinţează un cuvânt lipsit de sens. Acesta este un adevăr demult proclamat de toţi cei care au reflectat asupra chestiunii, dar prea adesea uitat.

Mă aflu într-un punct determinat din Paris, piaţa Panteonului, de exemplu, şi spun : voi reveni aici mâine. Dacă sunt întrebat : înţelegi că vei reveni în acelaşi punct din spaţiu, aş fi tentat să răspund : da. Şi totuşi m-aş înşela, pentru că, până mâine, Pământul se va fi deplasat, antrenând cu el piaţa Panteonului, care va fi parcurs mai mult de 2 milioane dc kilometri. Şi, dacă aş vrea să-mi precizez limbajul, n-aş câştiga nimic din asta, pentru că globul nostru a parcurs 2 milioane de kilometri în mişcarea sa în raport cu soarele, soare care la rându-i se deplasează în raport cu Calea Lactee, iar Calea Lactee însăşi se află în mişcare fără să-i putem cunoaşte viteza. Încât noi ignorăm complet şi vom ignora totdeauna cu cât se deplasează într-o zi piaţa Panteonului. În concluzie, am vrut să spun : mâine voi vedea din nou domul şi frontonul Panteonului, şi dacă n-ar exista Panteonul, fraza mea n-ar avea nici un sens şi spaţiul ar dispărea.

Aceasta este una dintre formele cele mai banale ale principiului de relativitate a spaţiului. Dar e şi o altă formă, asupra căreia

Delbeuf a insistat cu deosebire. Să presupunem că, într-o noapte, toate dimensiunile universului devin de o mie de ori mai mari : lumea va fi rămas *asemenea* sieşi, dând cuvântului *asemănare* acelaşi sens ca în cartea a treia de geometrie. Atâta doar că ceea ce avea un metru lungime va măsura de-acum un kilometru, ceea ce avea un milimetru lungime va măsura un metru. Patul în care m-am culcat şi însuşi timpul meu se vor fi mărit în aceeaşi proporţie. Ce sentiment m-ar încerca în prezenţa unei atât de uluitoare transformări, când m-aş trezi, a doua zi dimineaţa ? Ei bine, nu mi-aş da seama de nimic. Măsurătorile cele mai precise ar fi incapabile să-mi dezvăluie ceva din această imensă bulversare, pentru că metrii de care m-aş folosi vor fi variat exact în aceleaşi proporţii ca obiectele pe care aş încerca să le măsor. În realitate, această bulversare nu există decât pentru cei ce raţionează ca şi cum spaţiul ar fi absolut. Dacă am raţionat o clipă ca ei, este pentru a face să se vadă mai bine că felul lor de a vedea implică o contradicţie. În realitate, ar fi mai bine să spunem că spaţiul fiind relativ, nu s-a întâmplat absolut nimic şi tocmai de aceea nu ne-am dat seama de nimic.

În consecinţă, avem oare dreptul să spunem că se cunoaşte distanţa între două puncte ? Nu, pentru că această distanţă ar putea suferi variaţii enorme fără a ne putea da seama, cu condiţia ca celelalte distanţe să fi variat în aceleaşi proporţii. Am văzut adineauri că atunci când spun : mâine voi fi aici, asta nu voia să spună : voi fi mâine în punctul din spaţiu în care sunt azi, ci : voi fi mâine la aceeaşi distanţă de Panteon ca azi. Şi iată că acest enunţ nu mai este suficient şi trebuie să spun : mâine şi azi, distanţa mea faţă de Panteon va fi egală cu un acelaşi număr de ori lungimea trupului meu.

Dar asta nu-i totul. Am presupus că dimensiunile lumii variază, dar că cel puţin această lume rămâne mereu asemenea sieşi. Se poate merge mult mai departe, şi una dintre teoriile cele mai uimitoare ale fizicienilor moderni ne va da prilejul s-o facem. După Lorentz şi Fitzgerald[1], toate corpurile antrenate în mişcarea Pământului suferă o deformare. Această deformare este, în adevăr,

[1] *Vide infra*, Cartea a III-a, cap. II.

foarte slabă, pentru că toate dimensiunile paralele cu micşorarea Pământului scad cu o sută milionime, în timp ce dimensiunile perpendiculare pe această mişcare nu s-ar modifica. Dar nu are importanţă că e slabă, e de-ajuns, pentru concluzia pe care o voi trage îndată, ca ea să existe. De altfel, am spus că e slabă, dar, în realitate, nu ştiu absolut nimic despre ea. Am fost eu însumi victima iluziei persistente care ne face să credem că gândim un spaţiu absolut. M-am gândit la mişcarea Pământului pe orbita sa eliptică în jurul Soarelui şi i-am atribuit o viteză de 30 kilometri. Dar adevărata lui viteză (înţeleg, de data asta, nu viteza absolută, care nu are nici un sens, ci viteza sa în raport cu eterul) nu o cunosc şi nu am nici un mijloc de a o cunoaşte : ea este, poate, de 10, 100 de ori mai mare şi atunci deformarea ar fi de 100, 10 000 de ori mai puternică.

Putem noi pune în evidenţă această deformare ? Evident, nu. Să presupunem un cub cu latura de un metru. Ca urmare a deplasării Pământului, el se deformează, una din muchiile sale, cea paralelă cu mişcarea, devine mai mică, iar cealaltă nu variază. Dacă vreau să mă asigur de acest lucru cu ajutorul unui metru, aş măsura mai întâi una din muchiile perpendiculare pe mişcare şi aş constata că metrul meu se aplică exact pe această muchie. Într-adevăr, nici una dintre cele două lungimi nu s-a modificat, pentru că amândouă sunt perpendiculare pe mişcare. Vreau să măsor apoi cealaltă muchie — cea paralelă cu mişcarea. Pentru aceasta îmi deplasez metrul şi îl rotesc astfel încât să-l aplic pe muchie. După ce şi-a schimbat însă orientarea şi a devenit paralel cu mişcarea, metrul a suferit la rându-i deformarea, astfel că, deşi muchia nu mai are un metru lungime, el i se va aplica exact, iar eu nu-mi voi fi dat seama de nimic.

Voi fi atunci întrebat care este utilitatea ipotezei lui Lorentz şi Fitzgerald dacă nici o experienţă nu ne poate permite s-o verificăm ? Expunerea mea a fost incompletă. Nu am vorbit decât de măsurători pe care le putem face cu un metru. Dar o lungime poate fi măsurată şi cu ajutorul timpului necesar luminii pentru a o parcurge, cu condiţia de a admite că viteza luminii este constantă şi independentă de direcţie. Lorentz ar fi putut da seamă de fapte presupunând că viteza luminii e mai mare în direcţia mişcării

Pământului decât în direcţia perpendiculară. El a preferat să admită că viteza e aceeaşi în aceste diverse direcţii, dar că corpurile sunt mai mici în unele direcţii decât în altele. Dacă suprafeţele de undă ale luminii ar fi suferit aceleaşi deformări ca şi corpurile materiale, nu ne-am fi dat seama de deformarea Lorentz–Fitzgerald.

Nici într-un caz nici în celălalt nu poate fi vorba de o măsură absolută, ci de măsurarea acestei mărimi prin intermediul unui instrument oarecare. Acest instrument poate fi un metru sau drumul parcurs de lumină. Noi măsurăm numai raportul mărimii cu instrumentul. Şi dacă acest raport e modificat, nu avem nici un mijloc de a şti dacă ceea ce a variat e mărimea sau instrumentul.

Dar aş vrea să vă atrag atenţia asupra faptului că în această deformare lumea nu a rămas asemenea sieşi. Pătratele au devenit dreptunghiuri sau paralelograme, cercurile — elipse, sferele — elipsoide. Şi totuşi nu avem nici un mijloc de a şti dacă această deformare este reală.

Este evident că am putea merge mult mai departe. În locul deformării Lorentz-Fitzgerald ale cărei legi sunt deosebit de simple, am putea imagina o deformare absolut oarecare. Corpurile s-ar putea deforma după legi oarecare, oricât de complicate am dori ; nu ne-am putea da seama de acest lucru dacă toate corpurile fără excepţie se deformează după aceleaşi legi. Spunând : toate corpurile, fără excepţie, includ aici, bineînţeles, însuşi corpul nostru şi radiaţiile luminoase pe care le emană diverse obiecte.

Dacă am privi lumea în una dintre acele oglinzi de formă complicată care deformează obiectele în mod bizar, raporturile reciproce între diversele părţi ale acestei lumi nu ar fi modificate. Dacă două obiecte reale se ating efectiv, par a se atinge şi imaginile lor. La drept vorbind, când privim într-o asemenea oglindă, ne dăm seama de deformare, dar numai pentru că lumea reală subzistă alături de imaginea sa deformată. Şi chiar dacă această lume reală ne-ar fi ascunsă, există ceva care nu ne poate fi ascuns — noi înşine. Noi nu putem înceta să vedem, sau cel puţin să simţim trupul nostru şi membrele noastre care n-au fost deformate şi care continuă să ne servească drept instrumente de măsură. Dar dacă ne imaginăm că şi trupul nostru este deformat,

în felul în care ar fi văzut în oglindă, acele instrumente de măsură ne-ar lipsi la rândul lor şi deformarea n-ar mai putea fi constatată.

Iată şi două universuri care sunt unul imaginea celuilalt. Fiecărui obiect P din universul A îi corespunde în universul B un obiect P' care este imaginea lui. Coordonatele acestei imagini P' sunt funcţii determinate de cele ale obiectului P. Aceste funcţii pot fi absolut oarecare. Presupun doar că au fost alese o dată pentru totdeauna. Între poziţia lui P şi cea a lui P' există o relaţie constantă. Puţin contează care este această relaţie. E suficient ca ea să fie constantă.

Ei bine, aceste două universuri ar fi indiscernabile. Vreau să spun că primul ar fi pentru locuitorii săi ceea ce al doilea este pentru ai lui. Şi aşa ar fi câtă vreme cele două universuri ar rămâne străine unul de celălalt. Să presupunem că noi suntem locuitorii universului A, că ne vom fi construit ştiinţa noastră şi, în particular, geometria noastră. În acest timp locuitorii universului B vor fi construit o ştiinţă, şi cum lumea lor este imaginea lumii noastre, geometria lor ar fi şi ea imaginea geometriei noastre, sau, mai bine zis, ar fi aceeaşi. Dar dacă într-o bună zi ni se va deschide o fereastră asupra universului B, ni s-ar face milă de ei : „Nefericiţii, am spune, ei cred că au construit o geometrie, dar ceea ce numesc ei astfel nu e decât o imagine grotescă a geometriei noastre ; dreptele lor sunt toate strâmbe, cercurile lor sunt cocoşate, sferele lor prezintă inegalităţi capricioase". Şi nu ne-am îndoi că şi ei vorbesc la fel despre noi şi că nu vom şti niciodată cine are dreptate.

Se observă în ce sens larg trebuie înţeleasă relativitatea spaţiului. Spaţiul este în realitate amorf şi numai lucrurile pe care le conţine îi dau formă. Ce trebuie să gândim atunci despre acea intuiţie directă în care ne-ar fi dată dreapta sau distanţa ? Noi avem atât de puţin intuiţia distanţei, încât, cum spuneam, pe parcursul unei nopţi, o distanţă ar putea deveni de o mie de ori mai mare fără să ne putem da seama de asta, cu condiţia ca toate celelalte distanţe să fi suferit aceeaşi schimbare. Ba chiar în cursul unei nopţi universul B ar putea să se substituie universului A fără ca noi să avem vreun mijloc de a o şti, şi atunci liniile drepte de ieri vor fi încetat să fie drepte şi noi nu băgăm nimic de seamă.

O parte a spaţiului nu este prin ea însăşi şi în sensul absolut al cuvântului egală cu o altă parte a spaţiului ; căci dacă este egală pentru noi, nu ar fi egală pentru locuitorii universului B. Şi aceştia au exact tot atâtea drepturi să respingă opinia noastră câte avem noi să o condamnăm pe a lor.

Am arătat altundeva care sunt consecinţele acestor fapte din punctul de vedere al ideii pe care trebuie să ne-o facem despre geometria neeuclidiană şi despre alte geometrii asemănătoare. Nu vreau să revin. Azi m-aş situa într-un punct de vedere puţin diferit.

2

Dacă această intuiţie a distanţei, a direcţiei, a liniei drepte — într-un cuvânt, dacă această intuiţie directă a spaţiului nu există, cum se face că noi ne credem a fi în posesia ei ? Dacă nu e decât o iluzie, cum se face că această iluzie e atât de persistentă ? E ceea ce se cuvine să examinăm. Spuneam că nu există intuiţie directă a mărimii şi că noi nu putem atinge decât raportul acelei mărimi cu instrumentele noastre de măsură. Noi n-am fi putut construi deci spaţiul dacă n-am fi avut un instrument pentru a-l măsura. Ei bine, acest instrument la care raportăm totul, cel de care ne folosim instinctiv, este propriul nostru corp. În raport cu corpul nostru situăm obiectele exterioare, şi singurele relaţii spaţiale ale acestor obiecte pe care ni le putem reprezenta sunt relaţiile lor cu corpul nostru. Corpul nostru e cel care ne serveşte, ca să zicem aşa, drept sistem de axe de coordonate.

De exemplu, la un moment α, prezenţa obiectului A îmi este dezvăluită de simţul vederii ; la un alt moment β, prezenţa unui alt obiect B îmi este dezvăluită de un alt simţ — al auzului sau pipăitului, bunăoară. Apreciez că obiectul B ocupă acelaşi loc cu obiectul A. Ce înseamnă asta ? Mai întâi, nu înseamnă că cele două obiecte ocupă, în două momente diferite, un acelaşi punct dintr-un spaţiu absolut care, chiar dacă ar exista, ar scăpa cunoaşterii noastre, pentru că, între momentele α şi β, sistemul solar s-a deplasat şi noi nu putem cunoaşte deplasarea lui. Asta înseamnă că cele două obiecte ocupă aceeaşi poziţie relativă în raport cu corpul nostru.

Dar ce semnificaţie are, la rândul ei, această afirmaţie ? Impresiile care ne-au parvenit de la aceste obiecte au urmat căi absolut diferite, nervul optic pentru obiectul *A*, nervul acustic pentru obiectul *B*. Ele n-au nimic în comun din punct de vedere calitativ. Reprezentările pe care ni le putem face despre aceste obiecte sunt absolut eterogene, ireductibile una la alta. Ştim numai că, pentru a atinge obiectul *A*, n-am decât să întind braţul drept într-un anumit fel. Chiar dacă mă abţin s-o fac, îmi reprezint senzaţiile musculare şi alte senzaţii asemănătoare care ar însoţi întinderea braţului, şi această reprezentare e asociată cu cea a obiectului *A*.

Or, ştiu deopotrivă că pot atinge obiectul *B* întinzând braţul drept în acelaşi fel, întindere însoţită de acelaşi cortegiu de senzaţii musculare. Şi atunci când spun că cele două obiecte ocupă aceeaşi poziţie, nu vreau să spun altceva.

Mai ştiu că aş fi putut atinge obiectul *A* printr-o altă mişcare adecvată a braţului stâng şi îmi reprezint senzaţiile musculare care ar fi însoţit această mişcare ; şi prin aceeaşi mişcare a braţului stâng însoţită de aceleaşi senzaţii, aş fi putut deopotrivă atinge obiectul *B*.

Lucrul acesta e foarte important, pentru că m-aş putea astfel apăra împotriva pericolelor cu care m-ar putea ameninţa fie obiectul *A*, fie obiectul *B*. Fiecăreia dintre loviturile la care suntem expuşi, natura i-a asociat una sau mai multe modalităţi de a le para, care ne permit să ne apărăm de ele. Un acelaşi fel de a para poate răspunde mai multor lovituri. Astfel, o aceeaşi mişcare a braţului drept ne-ar fi permis să ne apărăm în momentul α împotriva obiectului *A* şi în momentul β împotriva obiectului *B*. La fel, o aceeaşi lovitură poate fi parată în mai multe moduri. Am spus, de exemplu, că obiectul *A* poate fi atins, indiferent, fie printr-o anumită mişcare a braţului drept, fie printr-o anumită mişcare a braţului stâng.

Toate aceste parări n-au nimic altceva comun între ele decât faptul că ne permit să ne punem la adăpost de o aceeaşi lovitură. Şi doar atâta, şi numai atâta înţelegem atunci când spunem că avem de-a face cu mişcări care ajung la un acelaşi punct din spaţiu. La fel, obiectele despre care spunem că ocupă un acelaşi punct din

spaţiu nu au nimic altceva comun între ele decât că o aceeaşi modalitate de a para ne poate permite să ne apărăm împotriva lor.

Sau, dacă preferaţi, să ne reprezentăm numeroase fire telegrafice, unele centripete, altele centrifuge. Firele centripete ne previn asupra unor accidente care se produc în exterior, firele centrifuge trebuie să aducă remediul împotriva acestora. Se stabilesc conexiuni de aşa natură ca atunci când, pe unul dintre firele centripete circulă un curent, acest curent să acţioneze asupra unui releu şi să provoace astfel un curent în unul dintre firele centrifuge. Lucrurile sunt aranjate pentru ca mai multe fire centripete să poată acţiona asupra unui acelaşi fir centrifug, dacă un acelaşi remediu convine mai multor suferinţe, şi ca un fir centripet să poată mişca diverse fire centrifuge, fie simultan, fie alternativ, ori de câte ori o aceeaşi suferinţă poate fi lecuită prin mai multe remedii.

Tocmai acest sistem complex de asociaţii, acest tablou de distribuţie, ca să zicem aşa, constituie toată geometria noastră sau, dacă vreţi, întreaga armătură instinctivă a geometriei noastre. Ceea ce numim intuiţia noastră a liniei drepte sau a distanţei este conştiinţa pe care o avem despre aceste asociaţii şi despre caracterul lor imperios.

E uşor de înţeles de unde provine acest caracter imperios. O asociaţie ne-ar apărea cu atât mai indestructibilă cu cât ar fi mai veche. Dar aceste asociaţii nu sunt, în majoritatea lor, cuceriri ale individului, pentru că le descoperim urma la copilul abia născut. Ele sunt cuceriri ale speciei umane. Selecţia naturală a trebuit să le aducă cu atât mai repede cu cât erau mai necesare.

În această privinţă, cuceririle de care vorbim sunt dintre cele mai vechi, pentru că fără ele apărarea organismului ar fi fost imposibilă. Din momentul în care celulele n-au mai fost doar juxtapuse şi a trebuit să se sprijine reciproc, a fost necesară organizarea unui mecanism asemănător cu cel pe care l-am descris mai sus pentru ca acest sprijin să nu greşească drumul şi să vină în întâmpinarea pericolului.

Când o broască e decapitată şi o picătură de acid e depusă într-un punct de pe piele, ea caută să şteargă acidul cu laba cea mai apropiată. Şi dacă această labă e amputată, ea îl înlătură cu laba de pe partea opusă. E vorba aici de acea dublă apărare de care

aminteam adineauri, care permite combaterea unei suferinţe printr-un al doilea remediu, dacă primul lipseşte. Şi spaţiul e tocmai această multiplicitate a apărărilor şi coordonarea care rezultă de aici.

Se observă astfel până la ce adâncime a inconştientului trebuie să coborâm pentru a descoperi primele urme ale acestor asociaţii spaţiale, pentru că părţile cele mai primitive ale sistemului nervos intră singure în acţiune. Cum să ne mirăm atunci de rezistenţa pe care o opunem oricărei încercări de a disocia ceea ce de atâta vreme este asociat ? Or, ceea ce numim evidenţa adevărurilor geometrice e însăşi această rezistenţă. Evidenţa nu e altceva decât repulsia pe care o resimţim în actul de a rupe cu foarte vechi deprinderi, cu care am dus-o totdeauna bine.

3

Spaţiul astfel creat nu e decât un mic spaţiu care nu se întinde mai departe decât poate atinge braţul meu. Intervenţia memoriei e necesară pentru a-i deplasa limitele. Există puncte asupra cărora n-aş avea nici o putere, orice efort aş face ca să întind mâna. Dacă aş fi fixat de sol ca un polip, bunăoară, care nu poate decât să-şi întindă tentaculele, toate aceste puncte ar fi în afara spaţiului, pentru că senzaţiile pe care le-am putea resimţi graţie acţiunii corpurilor situate în el nu ar fi asociate ideii nici unei mişcări care ne-ar permite să le atingem, nici unei apărări adecvate. Aceste senzaţii nu ne-ar părea a comporta nici un caracter spaţial şi n-am încerca să le localizăm.

Dar noi nu suntem fixaţi de sol ca animalele inferioare. Dacă duşmanul e prea departe, putem să ne deplasăm spre el mai întâi şi, când ne aflăm destul de aproape, să întindem mâna. E încă o apărare, dar una de lungă bătaie. Pe de altă parte, e o apărare complexă când şi în reprezentarea pe care ne-o facem despre ea intră reprezentarea senzaţiilor musculare cauzate de mişcările picioarelor, cea a senzaţiilor musculare cauzate de mişcarea finală a braţului, cea a senzaţiilor canalelor semicirculare etc. De altfel, trebuie să ne reprezentăm nu un complex de senzaţii simultane, ci un

complex de senzaţii succesive, care se urmează într-o ordine determinată. Tocmai de aceea spuneam adineauri că intervenţia memoriei e necesară.

Să mai observăm că, pentru a ajunge la un acelaşi punct, mă pot apropia mai mult de ţintă, încât trebuie să întind mai puţin mâna. Ce mai ştiu ? Că unui acelaşi pericol îi pot opune nu una, ci o multitudine de apărări. Toate aceste apărări sunt formate din senzaţii care pot să nu aibă nimic comun şi totuşi le vom privi ca definind un acelaşi punct din spaţiu, pentru că pot răspunde aceluiaşi pericol şi sunt deopotrivă asociate cu noţiunea acestui pericol. Posibilitatea de a para o aceeaşi lovitură constituie unitatea acestor apărări diverse, după cum posibilitatea de a fi parate în acelaşi fel determină unitatea loviturilor atât de diferite ca natură, care ne pot ameninţa dintr-un acelaşi punct al spaţiului. Tocmai această dublă unitate constituie individualitatea fiecărui punct din spaţiu. Nimic altceva nu conţine noţiunea de punct.

Spaţiul pe care îl consideram în paragraful precedent — şi pe care l-aş putea numi *spaţiul restrâns* — era raportat la axe de coordonate legate de corpul meu. Aceste axe erau fixe, deoarece corpul meu nu se mişca, numai membrele sale se deplasau. Care sunt axele la care se raportează în mod natural *spaţiul extins*, adică noul spaţiu mai sus definit ? Definim un punct prin seria de mişcări pe care trebuie să le facem pentru a-l atinge plecând de la o anumită poziţie iniţială a corpului. Axele sunt deci legate de această poziţie iniţială a corpului.

Dar poziţia pe care o numesc iniţială poate fi aleasă în mod arbitrar printre toate poziţiile pe care corpul meu le-a ocupat succesiv. Dacă memoria mai mult sau mai puţin inconştientă a acestor poziţii succesive e necesară în geneza noţiunii de spaţiu, această memorie poate urca mai mult sau mai puţin departe în trecut. De aici rezultă o anumită nedeterminare în însăşi definiţia spaţiului, şi tocmai această nedeterminare constituie relativitatea sa.

Nu mai există spaţiu absolut, există doar spaţiu relativ la o anumită poziţie iniţială a corpului. Pentru o fiinţă conştientă, care ar fi fixată de sol ca animalele inferioare, şi care, în consecinţă, n-ar cunoaşte decât spaţiul restrâns, spaţiul ar fi tot relativ (pentru că s-ar raporta la corpul său), dar acea fiinţă n-ar fi conştientă de

această relativitate, pentru că axele la care ar raporta spaţiul restrâns nu s-ar schimba ! Fără îndoială, stânca de care ar fi înlănţuită acea fiinţă n-ar fi imobilă, pentru că ar fi antrenată în mişcarea planetei noastre ; pentru noi, aşadar, aceste axe s-ar schimba în fiecare clipă ; pentru ea însă, nu s-ar schimba. Noi avem facultatea de a raporta spaţiul nostru extins când la poziţia *A* a corpului nostru, considerată ca iniţială, când la poziţia *B*, pe care a avut-o câteva clipe mai târziu, şi pe care suntem liberi s-o considerăm la rândul ei ca iniţială. Noi efectuăm deci în fiecare moment schimbări inconştiente de coordonate. Această facultate ar lipsi fiinţei imaginate mai sus şi, dat fiind că nu se deplasează, ea ar considera spaţiul ca absolut. În fiecare clipă, sistemul ei de axe i-ar fi impus. Oricât s-ar schimba, în realitate, acest sistem, el ar fi, pentru ea, mereu acelaşi, pentru că ar fi mereu sistemul *unic*. Altfel se prezintă lucrurile pentru noi, care, în fiecare moment, posedăm mai multe sisteme între care putem alege după voie şi cu condiţia de a urca mai mult sau mai puţin departe în trecut, cu ajutorul memoriei.

Asta nu-i totul. Spaţiul restrâns n-ar fi omogen. Diversele puncte din acest spaţiu n-ar putea fi privite ca echivalente, pentru că unele n-ar putea fi atinse decât cu preţul celor mai mari eforturi, în timp ce altele ar fi uşor accesibile. Dimpotrivă, spaţiul nostru extins ne apare ca omogen, şi spunem că toate punctele lui sunt echivalente. Ce înseamnă asta ?

Dacă plecăm de la o anumită poziţie *A*, putem efectua, de aici, anumite mişcări *M*, caracterizate printr-un anumit complex de senzaţii musculare. Dar plecând de la o altă poziţie *B*, am putea executa mişcări *M'* care ar fi caracterizate prin aceleaşi senzaţii musculare. Fie atunci *a* situarea unui anumit punct al corpului — a vârfului arătătorului de la mâna dreaptă, de exemplu — în poziţia iniţială *A*, fie *b* situarea aceluiaşi arătător când, plecând de la poziţia *A*, s-au executat mişcările *M*. Fie apoi *a'* situarea acestui arătător în poziţia *B* şi *b'* situarea sa atunci când, plecând de la poziţia B, au fost executate mişcările *M'*.

Ei bine ! Obişnuiesc să spun că punctele din spaţiu *a* şi *b* se află în aceeaşi relaţie ca punctele *a'* şi *b'*, ceea ce înseamnă doar că cele două serii de mişcări *M* şi *M'* sunt însoţite de aceleaşi senzaţii

musculare. Şi cum sunt conştient de faptul că, trecând de la poziţia *A* la poziţia *B*, corpul meu a rămas capabil de aceleaşi mişcări, ştiu că există un punct din spaţiu care este în raport cu punctul *a'* ceea ce un punct *b* oarecare este în raport cu punctul *a*, astfel că cele două puncte *a* şi *a'* sunt echivalente. E ceea ce se numeşte omogenitatea spaţiului. Şi, în acelaşi timp, de aceea spaţiul e relativ, pentru că proprietăţile sale rămân aceleaşi, fie că-l raportăm la axele A sau la axele *B*. Încât relativitatea spaţiului şi omogenitatea lui constituie unul şi acelaşi lucru.

Acum, dacă vreau să trec la spaţiul lărgit, care nu-mi mai serveşte doar mie — spaţiul în care pot situa universul —, voi ajunge aici printr-un act de imaginaţie. Mi-aş imagina ce ar resimţi un uriaş care ar putea atinge planetele după câţiva paşi ; sau, dacă preferaţi, ce aş resimţi eu însumi în prezenţa unei lumi în miniatură, unde planetele ar fi înlocuite cu mici bile, în timp ce pe una dintre acestea s-ar agita un liliputan cu care m-aş identifica. Dar n-aş putea efectua acest act de imaginaţie dacă n-aş fi construit în prealabil spaţiul meu restrâns şi spaţiul meu extins pentru uzul personal.

4

Şi acum, de ce toate aceste spaţii au trei dimensiuni ? Să ne întoarcem la „tabloul de distribuţie" despre care vorbeam mai sus. Avem, de o parte, lista diferitelor pericole posibile — să le desemnăm prin A_1, A_2 etc. — şi, de cealaltă parte, lista diferitelor remedii — B_1, B_2 etc. Avem apoi conexiuni între ploturile din prima listă şi cele din a doua, astfel ca, atunci când, bunăoară, va funcţiona avertizorul pericolului A_3, el va pune sau va putea pune în acţiune releul ce corespunde apărării B_4.

Cum vorbeam mai sus de fire centripete sau centrifuge, mă tem ca toate acestea să nu fie luate drept o descriere a sistemului nervos, iar nu o simplă comparaţie. Nu acesta e gândul meu, şi pentru mai multe motive : în primul rând, nu mi-aş permite să enunţ o opinie despre structura sistemului nervos pe care nu-l cunosc, în

vreme ce specialiştii care l-au studiat n-o fac decât cu prudenţă ; apoi pentru că, în pofida incompetenţei mele, simt că această schemă ar fi exagerat de simplistă ; şi, în sfârşit, pentru că, pe lista mea de strategii de apărare figurează unele foarte complexe care, în cazul spaţiului extins, cum am spus mai sus, pot fi formate din mai mulţi paşi urmaţi de o mişcare a braţului. Nu e vorba deci de o mişcare a braţului. Nu e vorba deci de o conexiune fizică între doi conductori reali, ci de o asociaţie psihologică între două serii de senzaţii.

Dacă, de exemplu, A_1 şi A_2 sunt asociaţi, şi unul şi celălalt, apărării B_1, şi dacă A_1 e asociat şi apărării B_2, atunci A_2 şi B_2 vor fi în general asociaţi. Dacă această lege fundamentală n-ar fi în general adevărată, n-ar exista decât o imensă confuzie şi nimic n-ar putea semăna cu o concepţie a spaţiului sau cu o geometrie. Cum am definit noi un punct din spaţiu ? Am făcut-o în două feluri : e, pe de o parte, ansamblul avertizorilor A care se află în conexiune cu o aceeaşi apărare B ; pe de altă parte, e ansamblul apărărilor B aflate în conexiune cu un acelaşi avertizor A. Dacă legea noastră n-ar fi adevărată, ar trebui să spunem că A_1 şi A_2 corespund unui acelaşi punct pentru că se află amândoi în conexiune cu B_1. Dar ar trebui să spunem deopotrivă că nu corespund unui acelaşi punct, pentru că A_1 ar fi în conexiune cu B_2 şi acest lucru n-ar fi valabil şi pentru A_2. Ceea ce ar fi o contradicţie.

Pe de altă parte, însă, dacă legea ar fi riguros şi întotdeauna adevărată, spaţiul ar fi cu totul diferit de ceea ce este. Am avea categorii bine tranşate între care s-ar repartiza avertizorii A, şi respectiv, apărările *B* ; aceste categorii ar fi excesiv de numeroase, dar complet separate unele de altele. Spaţiul ar fi format din puncte foarte numeroase, dar discrete ; ar fi *discontinuu*. N-am avea motive să aranjăm aceste puncte într-o ordine mai degrabă decât în alta, nici, în consecinţă, să atribuim spaţiului trei dimensiuni.

Dar nu aşa stau lucrurile. Să mi se îngăduie să reiau pentru o clipă limbajul oamenilor care cunosc deja geometria. Trebuie s-o fac, pentru că este limba pe care o înţeleg cel mai bine cei cărora încerc să mă fac înţeles. Când vreau să parez lovitura, încerc să ating punctul din care vine acea lovitură, dar e de-ajuns să ajung

destul de aproape de el. Atunci apărarea B_1 ar putea răspunde lui A_1 şi lui A_2, dacă punctul care corespunde lui B_1 e în acelaşi timp suficient de aproape de cel care corespunde lui A_2. S-ar putea însă întâmpla ca punctul care corespunde unei alte apărări B_2 să fie destul de aproape de punctul ce corespunde lui A_1, şi să nu fie destul de aproape de punctul ce corespunde lui A_2 încât apărarea B_2 ar putea răspunde lui A_1, dar nu şi lui A_2.

Pentru cel ce nu ştie încă geometria, asta s-ar traduce simplu printr-o derogare de la legea enunţată mai sus. Şi atunci lucrurile s-ar petrece în felul următor. Două apărări B_1 şi B_2 ar fi asociate unui aceluiaşi avertisment A_1 şi unui foarte mare număr de avertismente pe care le-am rândui în aceeaşi categorie cu A_1 şi pe care le-am face să corespundă unui acelaşi punct din spaţiu. Dar am putea găsi avertismente A_2 care ar fi asociate cu B_2, nu însă şi cu B_1, şi care în schimb ar fi asociate cu B_3, care B_3 nu era asociat cu A_1 ş.a.m.d., încât putem scrie şirul

$$B_1, A_1, B_2, A_2, B_3, A_3, B_4, A_4,$$

unde fiecare termen e asociat cu succesorul şi cu precedentul, dar nu e asociat cu termenii care se află la o distanţă de mai multe ranguri.

Inutil să adăugăm că fiecare dintre termenii acestor şiruri nu este izolat, ci face parte dintr-o foarte numeroasă categorie de alţi avertizori sau de alte apărători care are aceleaşi conexiuni ca şi el şi că îl putem considera ca aparţinând unui acelaşi punct din spaţiu. Deşi comportă excepţii, legea fundamentală rămâne deci aproape întotdeauna adevărată. Numai că, datorită excepţiilor, aceste categorii, în loc să fie complet separate, se suprapun parţial şi se întrepătrund într-o anumită măsură, încât spaţiul devine continuu.

Pe de altă parte, ordinea în care aceste categorii trebuie să fie dispuse nu e arbitrară, şi dacă revenim la şirul precedent, se observă că B_2 trebuie situat între A_1 şi A_2 şi, prin urmare, între B_1 şi B_3, şi că nu l-am putea plasa, de pildă, între B_3 şi B_4.

Există deci o ordine în care se rânduiesc în mod natural categoriile noastre care corespund punctelor din spaţiu, şi experienţa

ne învaţă că această ordine se prezintă sub forma unui tablou cu triplă intrare. Tocmai de aceea spaţiul are trei dimensiuni.

5

Proprietatea caracteristică a spaţiului, aceea de a avea trei dimensiuni, nu este astfel decât o proprietate a tabloului nostru de distribuţie, o proprietate internă a inteligenţei umane, ca să zicem aşa. Ar fi suficient să distrugem unele dintre aceste conexiuni, adică dintre aceste asociaţii de idei pentru a avea un tablou de distribuţie diferit — ceea ce ar putea fi suficient pentru ca spaţiul să dobândească o a patra dimensiune.

Unii s-ar mira de un asemenea rezultat. Lumea exterioară, ar considera ei, trebuie că există pentru ceva. Dacă numărul dimensiunilor provine din modul în care suntem noi făcuţi, ar putea exista fiinţe gânditoare care ar trăi în lumea noastră, dar care ar fi făcute altfel decât noi şi ar crede că spaţiul are mai mult sau mai puţin de trei dimensiuni. N-a afirmat de Cyon că şoarecii japonezi, care nu au decât două perechi de canale semicirculare, cred că spaţiul are două dimensiuni ? Şi atunci, acea fiinţă gânditoare, dacă ar fi capabilă să construiască o fizică, nu va face o fizică cu două sau cu patru dimensiuni, şi care într-un sens ar fi totuşi aceeaşi cu a noastră, deoarece ar fi descrierea aceleiaşi lumi într-un alt limbaj ?

Se pare într-adevăr că ar fi posibil să traducem fizica noastră în limbajul geometriei cu patru dimensiuni ; a încerca această traducere înseamnă a-ţi crea multe neplăceri în schimbul unui câştig neînsemnat. M-aş limita să citez mecanica lui Hertz, în care vedem ceva asemănător. Se pare totuşi că traducerea ar fi totdeauna mai puţin simplă decât textul, şi că ea ar avea totdeauna aerul unei traduceri, că limba celor trei dimensiuni pare cea mai bine adaptată descrierii lumii noastre, deşi această descriere se poate face, la rigoare, într-un alt idiom.

De altminteri, tabloul nostru de distribuţie nu s-a constituit la întâmplare. Există conexiune între avertismentul A_1 şi apărarea B_1, aceasta este o proprietate internă a inteligenţei noastre. Dar de ce

această conexiune ? Pentru că B_1 permite efectiv apărarea împotriva pericolului A_1. Acesta este un fapt exterior nouă, este o proprietate a lumii exterioare. Tabloul nostru de distribuţie nu este decât traducerea unui ansamblu de fapte exterioare. Dacă are trei dimensiuni, este pentru că s-a adaptat unei lumi care are anumite proprietăţi. Proprietatea principală este aceea că există solide naturale ale căror deplasări se fac în mod vădit după legile pe care le numim legile mişcării solidelor invariabile. Dacă aşadar limba celor trei dimensiuni este aceea care ne permite cel mai uşor să descriem lumea noastră, lucrul nu trebuie să ne mire. Această limbă e modelată după tabloul nostru de distribuţie — tablou instituit tocmai pentru a putea trăi în această lume.

Am afirmat că am putea concepe fiinţe gânditoare, trăind în lumea noastră, al căror tablou de distribuţie ar avea patru dimensiuni şi care, în consecinţă, ar gândi în hiperspaţiu. Nu e totuşi sigur că asemenea fiinţe, admiţând că se nasc în lumea noastră, ar putea trăi în ea şi s-ar putea apăra împotriva miilor de pericole cu care ar fi asaltate.

6

Câteva remarci finale. Există un contrast izbitor între caracterul grotesc al acestei geometrii primitive, care se reduce la ceea ce numesc un tablou de distribuţie, şi precizia infinită a geometriei geometrilor. Şi totuşi, aceasta din urmă s-a născut din prima. Dar nu numai din ea. A fost nevoie ca ea să fie fecundată de facultatea noastră de a construi concepte matematice, ca cel de grup, bunăoară. A trebuit ca pentru conceptele pure să fie căutat conceptul care se adaptează cel mai bine acestui spaţiu grosier, a cărui geneză am încercat s-o explic în paginile precedente şi care este comun cu cel al animalelor superioare.

Spuneam că evidenţa anumitor postulate geometrice nu este decât repulsia noastră de a renunţa la deprinderi foarte vechi. Dar aceste postulate sunt infinit precise, în timp ce deprinderile au ceva esenţialmente vag. Din clipa în care vrem să gândim, avem nevoie

de postulate infinit precise, pentru că acesta este singurul mijloc de a evita contradicţia. Dar printre toate sistemele de postulate posibile, pe unele am refuza să le alegem, pentru că nu s-ar acorda îndeajuns cu deprinderile noastre ; oricât de imprecise, oricât de elastice ar fi, aceste deprinderi au o limită de elasticitate.

Se vede că, dacă geometria nu e o ştiinţă experimentală, e o ştiinţă care a apărut în legătură cu experienţa, că noi am creat spaţiul pe care ea îl studiază, dar adaptându-l la lumea în care trăim. Noi am ales spaţiul cel mai comod, dar alegerea noastră a fost călăuzită de experienţă. Cum această alegere a fost inconştientă, ni se pare că ne este impusă. Unii spun că experienţa ni-l impune, alţii că ne naştem cu spaţiul nostru gata făcut. Se vede, după consideraţiile precedente, care este în aceste două opinii partea de adevăr şi partea de eroare.

E foarte greu de determinat ce revine individului şi ce speciei în cadrul acestei dezvoltări progresive care a condus la construcţia spaţiului. În ce măsură unul dintre noi, transferat de la naştere într-o lume complet diferită, în care, de pildă, ar domina corpuri care se deplasează conform legilor de mişcare ale solidelor neeuclidiene, în ce măsură, zic, ar putea el să renunţe la spaţiul ancestral pentru a construi un spaţiu complet nou ?

Partea care revine speciei pare preponderentă. Totuşi, dacă ei îi datorăm spaţiul grosier, spaţiul imprecis de care vorbeam adineauri, spaţiul animalelor superioare, oare nu experienţei inconştiente a individului datorăm spaţiul infinit precis al geometrului ? E o chestiune greu de rezolvat. Să citărn totuşi un fapt care arată că spaţiul pe care ni l-au transmis strămoşii noştri păstrează încă o anumită plasticitate. Unii vânători învaţă să vâneze peşti sub apă, deşi imaginea acestor peşti s-a relevat prin refracţie. Ei o fac de altfel în mod instinctiv : au învăţat deci să-şi modifice vechiul lor instinct al direcţiei ; sau, dacă vreţi, au învăţat să substituie asociaţiei A_1, B_1 o altă asociaţie A_1, B_2, pentru că experienţa le-a arătat că prima nu reuşeşte.

CAPITOLUL II

Definiţiile matematice şi învăţământul

1. Trebuie să vorbesc aici despre definiţiile generale în matematici. Cel puţin asta spune titlul capitolului. Dar mi-ar fi cu neputinţă să mă limitez strict la acest subiect pe cât ar cere-o regula unităţii de acţiune. Nu-l voi putea trata fără să vorbesc puţin despre alte probleme înrudite. Şi dacă sunt astfel obligat să mă abat din când în când la dreapta sau la stânga, vă rog să binevoiţi a mi-o ierta.

Ce este o bună definiţie ? Pentru filosof, sau pentru savant, este o definiţie care se aplică tuturor obiectelor definite şi numai lor. E definiţia care satisface regulile logicii. Dar în învăţământ altfel stau lucrurile. O bună definiţie e cea pe care o înţeleg elevii.

Cum se face că există atâtea minţi care refuză să înţeleagă matematicile ? Nu e aici ceva paradoxal ? Cum adică, e vorba de o ştiinţă care nu face apel decât la principiile fundamentale ale logicii, la principiul noncontradicţiei, de exemplu, la ceea ce constituie ca să zic aşa scheletul intelectului nostru, la ceea ce n-am putea înlătura fără a înceta să gândim, şi există oameni care o găsesc obscură ! Ba chiar majoritatea ! Că sunt incapabili să inventeze, mai admitem, dar că nu înţeleg demonstraţiile care le sunt expuse, că rămân orbi atunci când le prezentăm o lumină ce ni se pare a străluci cu o sclipire pură, e absolut uluitor.

Şi totuşi, nu trebuie să ai o mare experienţă a examenelor pentru a şti că aceşti orbi nu sunt defel fiinţe de excepţie. E aici o problemă care nu e uşor de rezolvat, dar care trebuie să-i preocupe pe toţi cei ce vor să se consacre învăţământului.

Ce înseamnă a înţelege ? Are acest cuvânt acelaşi sens pentru toată lumea ? A înţelege demonstraţia unei teoreme înseamnă oare

a examina succesiv fiecare din silogismele din care se compune şi a constata că este corect, conform regulilor jocului ? La fel, a înţelege o definiţie înseamnă doar a recunoaşte că ştim deja sensul tuturor termenilor întrebuinţaţi şi a constata că ea nu implică nici o contradicţie ?

Da, pentru unii ; când vor fi făcut această constatare, vor spune: am înţeles. Nu, pentru cei mai mulţi. Aproape toţi sunt mult mai exigenţi, ei vor să ştie nu doar dacă toate silogismele unei demonstraţii sunt corecte, ci şi de ce ele se înlănţuiesc în cutare ordine mai curând decât în alta. Câtă vreme le par generate de capriciu, iar nu de o inteligenţă mereu conştientă de scopul ce trebuie atins, ei nu cred că au înţeles.

Fără îndoială, ei înşişi nu-şi dau bine seama de ce anume reclamă şi n-ar putea formula dorinţa lor, dar dacă nu le e satisfăcută, simt vag că ceva le lipseşte. Ce se întâmplă atunci ? La început, ei observă încă evidenţele puse sub ochii lor. Dar cum nu sunt legate decât printr-un fir prea subţire de cele care preced şi de cele care urmează, ele trec fără să lase urmă în creierul lor. Sunt cu totul uitate. O clipă luminate, ele recad îndată într-o noapte eternă. Când vor fi mai avansaţi, nu vor mai vedea nici această lumină efemeră, pentru că teoremele se sprijină unele pe altele şi cele de care ar avea nevoie nu mai sunt prezente în memoria lor. Ei devin astfel incapabili să înţeleagă matematicile.

Nu totdeauna vina e a profesorului lor. Adesea inteligenţa lor, care are nevoie să observe firul conducător, e prea leneşă pentru a-l căuta şi găsi. Dar pentru a le veni în ajutor, trebuie mai întâi să înţelegem bine ce anume îi blochează.

Alţii se vor întreba mereu la ce servesc toate astea. Şi nu vor fi înţeles dacă nu găsesc în jurul lor, în practică sau în natură, raţiunea de a fi a cutării sau cutării noţiuni matematice. Sub fiecare cuvânt, ei vor să pună o imagine sensibilă ; trebuie ca definiţia să evoce acea imagine, ca în fiecare stadiu al demonstraţiei ei s-o vadă transformându-se şi evoluând. Numai cu această condiţie vor înţelege şi vor reţine. Ei se autoamăgesc adesea ; nu ţin seama de raţionamente, privesc doar figurile ; îşi închipuie că au înţeles şi de fapt n-au făcut decât să vadă.

2. Câte înclinaţii diferite ! Trebuie să le combatem ? Trebuie să ne folosim de ele ? Şi dacă am vrea să le combatem, pe care ar trebui s-a favorizăm ? Oare celor care se mulţumesc cu logica pură ar trebui să le arătăm că n-am văzut decât o faţă a lucrurilor ? Ori trebuie spus celor ce nu se mulţumesc cu atât de puţin că ceea ce reclamă ei nu este necesar ?

Cu alte cuvinte, trebuie să-i constrângem pe cei tineri să schimbe natura inteligenţei lor ? O asemenea tentativă ar fi zadarnică. Noi nu posedăm piatra filosofală care ne-ar permite să transmutăm unele în altele metalele ce ne sunt încredinţate. Tot ce putem face este să le prelucrăm acomodându-ne cu proprietăţile lor.

Mulţi copii sunt incapabili să devină matematicieni, dar trebuie să li se predea şi lor matematicile. Matematicienii înşişi nu sunt toţi făcuţi după acelaşi calapod. E de-ajuns să le citeşti lucrările pentru a deosebi printre ele două tipuri de spirite, logicienii ca Weierstrass, de pildă, şi intuitivii, ca Riemann. Aceeaşi diferenţă se regăseşte printre studenţii noştri. Unora le place mai mult să trateze problemele lor „prin analiză", cum spun ei, altora — „prin geometrie".

E inutil să încercăm să schimbăm aici ceva. Şi, de altfel, ar fi de dorit ? E bine că există logicieni şi că există intuitivi. Cine ar îndrăzni să spună că ar fi de preferat ca Weierstrass să nu fi scris niciodată, sau să nu fi existat Riemann ? Trebuie deci să ne resemnăm cu diversitatea spiritelor, sau, mai bine zis, trebuie să ne bucurăm de ea.

3. Întrucât cuvântul *a înţelege* are mai multe sensuri, definiţiile cele mai bine înţelese de unii nu vor conveni altora. Există definiţii care produc o imagine şi definiţii în care ne limităm să combinăm forme vide, perfect inteligibile, pe care abstracţia le-a lipsit de orice materie.

Nu ştiu dacă e necesar să citâm exemple. Să citâm totuşi. Mai întâi, definiţia funcţiilor ne va oferi un exemplu extrem. În şcolile primare, pentru a defini o fracţie, tăiem în bucăţi un măr sau o tartă. O tăiem mental, bineînţeles, şi nu în realitate, căci nu presupun că bugetul învăţământului primar ar permite o asemenea

risipă. Dimpotrivă, la şcoala normală superioară sau în facultăţi, se va spune : o fracţie este ansamblul a două numere întregi despărţite printr-o linie orizontală. Vor fi definite prin convenţii operaţiile ce pot fi făcute cu aceste simboluri. Se va demonstra că regulile acestor operaţii sunt aceleaşi ca în calculul numerelor întregi şi se va constata în sfârşit că înmulţind — potrivit acelor reguli — fracţia cu numitorul, regăsim numărătorul. E foarte bine să procedăm aşa, pentru că ne adresăm unor tineri de mult familiarizaţi cu noţiunea de fracţii de care se vor fi folosit ca să împartă mere şi alte obiecte, şi al căror spirit, rafinat de o viguroasă educaţie matematică, a ajuns treptat să dorească o definiţie pur logică. Dar care ar fi stupefacţia unui începător căruia am vrea să i-o servim ?

De acest fel sunt şi definiţiile pe care le găsiţi într-o carte pe drept admirată şi de multe ori premiată — „Grundlagen der Geometrie", a lui Hilbert. Să vedem cum începe ea : *Să concepem trei sisteme de LUCRURI pe care le vom numi puncte, drepte şi planuri.* Ce sunt aceste „lucruri" ? N-o ştim şi n-avem s-o ştim. Ar fi chiar inoportun să încercăm s-o ştim. Tot ce avem dreptul să ştim despre ele este ceea ce ne spun axiomele. Aceasta, de exemplu : *Două puncte diferite determină totdeauna o dreaptă, care e urmată de următorul comentariu : în loc de „determină" putem spune că dreapta trece prin aceste două puncte, sau că ea uneşte cele două puncte sau că cele două puncte sunt situate pe dreaptă.* Astfel, „a fi situat pe o dreaptă" este definit simplu ca sinonim cu „a determina o dreaptă". Iată o carte despre care gândesc multe lucruri de bine, dar pe care n-aş recomanda-o unui licean. În definitiv, aş putea-o face fără teamă, acesta n-ar merge prea departe cu lectura.

Am luat exemple extreme şi nici unui profesor nu i-ar putea trece prin minte să meargă atât de departe. Dar, chiar rămânând mult dincoace de asemenea modele, nu se expune el deja la acelaşi pericol ?

Suntem într-o clasă de a patra. Profesorul dictează: cercul este locul punctelor din plan care se află la aceeaşi distanţă de un punct interior numit centru. Elevul conştiincios scrie această frază pe caietul său ; elevul recalcitrant desenează oameni. Dar nici unul nici celălalt n-au înţeles. Atunci profesorul ia creta şi trasează un cerc

pe tablă. „Ah ! gândesc elevii, de ce nu spunea mai repede : un cerc e ceva rotund, am fi înţeles". Fără îndoială, dreptate are profesorul. Definiţia elevilor n-ar fi putut folosi la nici o demonstraţie, şi mai ales pentru că nu le-ar fi putut da deprinderea salutară de a-şi analiza concepţiile. Dar ar trebui să li se arate că nu înţeleg ceea ce credeau că înţeleg, să fie aduşi în situaţia de a-şi da seama de caracterul rudimentar al conceptului lor primitiv, să dorească ei înşişi să-l epureze şi să-l şlefuiască.

4. Voi reveni asupra tuturor acestor exemple. Am vrut doar să vă arăt cele două concepţii opuse. Între ele există un contrast violent, pe care ni-l explică istoria ştiinţei. Dacă citim o carte scrisă acum cincizeci de ani, majoritatea raţionamentelor pe care le-am găsi în ea ni s-ar părea lipsite de rigoare.

Să admitea pe-atunci că o funcţie continuă nu-şi poate schimba semnul fără să se anuleze. Se admitea că regulile de calcul obişnuite sunt aplicabile numerelor incomensurabile. Azi acest lucru se demonstrează. Se admiteau multe alte lucruri care uneori erau false.

Matematicienii se încredinţau intuiţiei. Dar intuiţia nu ne poate da rigoarea, nici măcar certitudinea. Ne-am dat seama din ce în ce mai mult că aşa e. Ea ne învaţă de pildă că orice curbă are o tangentă, cu alte cuvinte că orice funcţie continuă are o derivată, ceea ce e fals. Şi cum se ţinea la certitudine, a trebuit ca partea intuiţiei să fie din ce în ce mai restrânsă.

Cum s-a produs această evoluţie necesară ? Matematicienii n-au întârziat să-şi dea seama că rigoarea nu putea fi instituită în raţionamente, dacă nu era introdusă mai întâi în definiţii.

Multă vreme obiectele de care se ocupă matematicienii au fost prost definite. Se credea că ele sunt cunoscute pentru că erau reprezentate cu ajutorul simţurilor sau al imaginaţiei, dar nu exista decât o imagine grosieră despre ele, iar nu o idee precisă la care să se poată aplica raţionamentul.

În această direcţie a trebuit să se îndrepte efortul logicienilor, cum e cazul numărului incomensurabil.

Ideea vagă de continuitate, pe care o datorăm intuiţiei, s-a resorbit într-un sistem complicat de inegalităţi referitoare la

numere întregi. Aşa s-au risipit definitiv toate acele dificultăţi de care erau îngroziţi părinţii noştri, atunci când reflectau la fundamentele calculului infinitezimal.

Nu mai rămân azi în analiză decât numere întregi, sau sisteme finite ori infinite de numere întregi, legate printr-o reţea de egalităţi şi inegalităţi.

Matematicile, cum s-a spus, s-au aritmetizat.

5. Să considerăm însă că matematicile au atins rigoarea absolută fără să facă sacrificii ? Nicidecum. Ceea ce au câştigat în rigoare, au pierdut în obiectivitate. Ele au dobândit această puritate perfectă îndepărtându-se de realitate. Poţi parcurge liber întregul lor domeniu, altădată presărat cu obstacole, dar aceste obstacole n-au dispărut. Ele au fost doar transferate la graniţă şi va trebui să le învingem din nou dacă vrem să trecem această graniţă şi să pătrundem în domeniul practicii.

Se dispunea de o noţiune vagă, formată din elemente disparate, unele *a priori*, altele provenite din experienţe mai mult sau mai puţin asimilate ; se credea că li se cunosc, prin intuiţie, principalele proprietăţi. Azi sunt respinse elementele empirice şi nu se păstrează decât elementele *a priori*. Numai una din proprietăţi serveşte drept definiţie şi toate celelalte se deduc din ea printr-un raţionament riguros. E foarte bine aşa, dar rămâne de dovedit că această proprietate, care a devenit o definiţie, aparţine obiectelor reale pe care experienţa ne-a făcut să le cunoaştem şi din care am obţinut vaga noastră noţiune intuitivă. Pentru a o dovedi, ar trebui să apelăm la experienţă sau să facem un efort de intuiţie, şi dacă n-am putea-o dovedi, teoremele noastre ar fi absolut riguroase, dar absolut inutile.

Uneori logica zămisleşte monştri. De o jumătate de secol asistăm la apariţia unei sumedenii de funcţii bizare care par a se strădui să semene cât mai puţin posibil cu funcţiile normale care servesc la ceva. Gata cu continuitatea, sau continuitate, dar nu derivate etc. Mai mult, din punct de vedere logic tocmai aceste funcţii ciudate sunt cele mai generale ; acelea pe care le întâlnim fără să le fi căutat nu mai apar decât ca un caz particular. Le rămâne doar un spaţiu foarte restrâns.

Altădată, inventarea unei funcţii noi răspundea unui scop practic ; azi sunt inventate în mod expres pentru a invalida raţionamentele părinţilor noştri şi niciodată nu se va obţine de la ele mai mult decât atât.

Dacă logica ar fi singurul ghid al pedagogului, ar trebui să se plece de la funcţiile cele mai generale, adică de la cele mai bizare. Începătorul ar trebui pus în contact cu acest muzeu teratologic. Dacă n-o faceţi, ar putea spune logicienii, nu veţi atinge rigoarea decât în etape.

6. Da, poate, dar nu putem nesocoti atât de mult realitatea, şi nu am în vedere doar realitatea lumii sensibile, care are totuşi valoarea ei, deoarece nouă zecimi din elevii noştri vă cer să-i înarmaţi pentru a se confrunta cu ea. Există o realitate mai subtilă care constituie viaţa făpturilor matematice şi care este altceva decât logica.

Corpul nostru este alcătuit din celule şi celulele din atomi. Aceste celule şi aceşti atomi constituie deci întreaga realitate a corpului omenesc ? Oare modul în care aceste celule sunt combinate, şi de unde rezultă unitatea individului, nu este de asemenea o realitate şi încă mult mai interesantă ?

Un naturalist care n-ar fi studiat niciodată elefantul decât la microscop poate crede că cunoaşte îndeajuns acest animal ?

La fel şi în matematici. Atunci când logicianul va fi descompus fiecare demonstraţie într-o mulţime de operaţii elementare, toate corecte, el n-ar poseda încă realitatea întreagă. I-ar scăpa complet acel nu ştiu ce care constituie unitatea demonstraţiei.

În edificiile ridicate de meşterii noştri, la ce bun am admira opera zidarului dacă nu putem înţelege planul arhitectului ? Or, această vedere de ansamblu nu ne-o poate da logica, trebuie s-o cerem de la intuiţie.

Să luăm bunăoară ideea de funcţie continuă. La început ea nu e decât o imagine sensibilă, o linie trasată cu creta pe tabla neagră. Puţin câte puţin ea se purifică. Ne folosim de ea pentru a construi un sistem complicat de inegalităţi, care reproduce toate liniile din imaginea iniţială. Când totul a fost terminat, am *descintrat,* ca după construcţia unei bolţi. Acea reprezentare grosieră, sprijin de-acum inutil, a dispărut şi nu a rămas decât edificiul însuşi, ire-

proşabil în ochii logicianului. Şi totuşi, dacă profesorul n-ar reaminti imaginea primitivă, dacă n-ar restabili momentan *cintrul*, cum ar ghici elevul prin ce capriciu toate aceste inegalităţi s-au aşezat unele peste altele ? Definiţia ar fi corectă din punct de vedere logic, dar nu i-ar arăta realitatea adevărată.

7. Iată-ne deci obligaţi să revenim. Fără îndoială, este dur pentru un profesor să predea ceea ce nu-l satisface în întregime. Dar satisfacţia profesorului nu este singurul scop al învăţământului. Trebuie să te preocupi mai întâi de ce anume este mintea elevului şi de ce vrei să devină ea.

Zoologii susţin că dezvoltarea embrionară a unui animal rezumă într-un timp foarte scurt întreaga istorie a strămoşilor săi din timpurile geologice. Se pare că la fel se întâmplă şi cu dezvoltarea spiritelor. Educatorul trebuie să-l facă pe copil să treacă şi el pe acolo pe unde au trecut părinţii lui — mai rapid, dar fără să se sară etapele. În această privinţă, istoria ştiinţei trebuie să fie primul nostru ghid.

Părinţii noştri credeau că ştiu ce e aceea o fracţie, sau ce e continuitatea, sau ce e aria unei suprafeţe curbe. Dar noi ne-am dat seama că n-o ştiau. La fel elevii noştri cred c-o ştiu atunci când încep să studieze serios matematicile. Dacă, fără altă pregătire, vin şi le spun : „Nu, n-o ştiţi ; voi nu înţelegeţi ceea ce doar credeţi că înţelegeţi ; trebuie să vă demonstrez ceea ce vi se pare evident", şi dacă în demonstraţie mă bazez pe premise care lor li se par mai puţin evidente decât concluzia, ce-ar crede aceşti nefericiţi ? Ar crede că ştiinţa matematică nu e decât o aglomerare arbitrară de subtilităţi inutile ; fie că le-ar apărea dezgustătoare, fie că s-ar amuza de ea ca de un joc şi ar ajunge la o stare de spirit asemănătoare cu cea a sofiştilor greci.

Dimpotrivă, mai târziu, când mintea elevului, familiarizată cu raţionamentul matematic se va fi maturizat graţie acestei îndelungate frecventări, îndoielile vor apărea de la sine şi atunci demonstraţia voastră va fi cea binevenită. Ea va trezi noi îndoieli, şi întrebările se vor pune succesiv copilului, aşa cum s-au pus succesiv părinţilor noştri, până ce singură rigoarea perfectă îi poate satisface. Nu e suficient să te îndoieşti de totul, trebuie să ştii de ce te îndoieşti.

8. Scopul principal al învăţământului matematic este să dezvolte anumite facultăţi ale spiritului şi printre ele intuiţia nu e cea mai puţin preţioasă. Prin intuiţie universul matematic rămâne în contact cu lumea reală şi, când matematicile pure s-ar putea dispensa de această lume reală, la ea trebuie recurs mereu pentru a umple prăpastia care desparte simbolul de realitate. Practicianul va avea totdeauna nevoie de ea şi la un geometru pur trebuie să existe o sută de practicieni.

Inginerul trebuie să primească o educaţie matematică completă, dar la ce trebuie să-i folosească ? La sesizarea diverselor aspecte ale lucrurilor şi la sesizarea lor rapidă. El nu are timp să caute nod în papură. E necesar ca, în obiectele fizice complexe care i se oferă, el să recunoască prompt punctul în care s-ar putea aplica instrumentele pe care i le-am pus în mână. Cum ar face-o dacă între unele şi altele am lăsa acea prăpastie profundă săpată de logicieni ?

9. Alături de viitori ingineri, alţi elevi, mai puţin numeroşi, trebuie la rândul lor să devină profesori. E necesar deci ca ei să meargă până la fundamente. Le e indispensabilă înainte de toate o cunoaştere aprofundată şi riguroasă a primelor principii. Dar aceasta nu este un motiv pentru a nu le cultiva intuiţia. Căci şi-ar face o idee falsă despre ştiinţă dacă n-ar privi-o niciodată decât într-o singură latură şi, pe de altă parte, n-ar putea dezvolta la elevii lor o calitate pe care ei înşişi n-ar avea-o.

Această facultate este necesară şi pentru geometrul pur : se demonstrează prin logică, se inventează prin intuiţie. A şti să critici e bine, a şti să creezi e şi mai bine. Ştiţi să recunoaşteţi dacă o combinaţie este corectă ; la ce bun dacă nu posedaţi arta de a alege între toate combinaţiile posibile. Logica ne spune că pe o cale sau alta suntem siguri că nu întâlnim obstacole ; ea nu ne spune care este semnul ce duce la ţintă. Pentru asta trebuie să vezi ţinta de departe şi facultatea care ne învaţă să vedem este intuiţia. În absenţa ei, geometrul ar fi ca un scriitor tobă de gramatică, dar lipsit de idei. Cum s-ar dezvolta însă această facultate dacă îndată ce se iveşte o alungăm şi o prescriem, dacă îi învăţăm pe elevi să nu aibă încredere în ea înainte de a şti la ce poate folosi ?

Şi aici, îngăduiţi-mi să deschid o paranteză pentru a insista asupra importanţei lucrărilor scrise. Poate că acestea nu au o pondere suficientă în cadrul anumitor examene, de pildă, la Şcoala politehnică. Mi se spune că ele ar închide poarta unor foarte buni elevi care îşi cunosc foarte bine cursurile, care le înţeleg foarte bine, şi care totuşi sunt incapabili de cea mai neînsemnată aplicaţie a lor. Spuneam adineauri că termenul *a înţelege* are mai multe sensuri : elevii despre care vorbeam nu înţeleg decât în primul fel, şi am văzut că el nu e suficient nici pentru a produce un inginer, nici pentru a produce un geometru. Ei bine, întrucât trebuie să fac o alegere, prefer să-i aleg pe cei care înţeleg în toate sensurile.

10. Dar arta de a raţiona corect nu e şi ea o calitate preţioasă, pe care profesorul de matematici trebuie s-o cultive înainte de toate ? Nici nu mă gândesc s-o uit. Trebuie să ne preocupe, şi chiar de la început. M-ar mâhni profund să văd geometria degenerând în nu ştiu ce tahimetrie de speţă joasă şi nu subscriu defel la doctrinele extreme ale unor profesori germani. Dar avem suficiente ocazii să-i exersăm pe elevi în raţionamentul corect în acele părţi ale matematicilor unde inconvenientele pe care le-am semnalat nu se prezintă. Există lungi înlănţuiri de teoreme unde logica absolută a dominat de la început şi, ca să zicem aşa, cu totul natural, unde primii geometri ne-au oferit modele pe care ar trebui să le imităm şi să le admirăm în mod statornic.

Tocmai în expunerea primelor principii trebuie evitată prea multă subtilitate ; ea ar fi aici mai respingătoare şi de altfel inutilă. Nu se poate demonstra totul şi nu se poate defini totul ; şi va trebui mereu să apelăm la intuiţie ; ce contează că o facem puţin mai devreme sau puţin mai târziu, ori chiar că îi cerem ceva mai mult sau ceva mai puţin, cu condiţia ca servindu-ne corect de premisele pe care ni le-a oferit, să învăţăm să raţionăm corect.

11. Este oare posibil să îndeplinim atâtea condiţii opuse ? Este posibil acest lucru mai ales când trebuie dată o definiţie ? Cum să găseşti un enunţ concis care să dea satisfacţie în acelaşi timp regulilor intransigente ale logicii, dorinţei noastre de a înţelege locul noţiunii noi în ansamblul ştiinţei, nevoii noastre de a gândi cu aju-

torul imaginilor ? Cel mai adesea nu-l vom găsi şi de aceea nu e suficient să enunţi o definiţie ; trebuie să o pregăteşti şi să o justifici. Ce vreau să spun prin asta ? Ştiţi ce s-a spus adesea : orice definiţie implică o axiomă, pentru că afirmă existenţa obiectului definit. Definiţia nu va fi deci justificată, din punct de vedere pur logic, decât atunci când vom fi *demonstrat* că nu atrage după sine o contradicţie, nici în termeni, nici cu adevărurile anterior admise.

Dar asta nu-i de-ajuns. Definiţia ne este enunţată ca o convenţie. Dar majoritatea spiritelor s-ar revolta dacă vreţi să le-o impuneţi ca pe o convenţie *arbitrară*. Ele nu se vor linişti decât atunci când veţi fi răspuns la numeroase întrebări.

Cel mai adesea definiţiile matematice, cum a arătat-o Liard, sunt adevărate construcţii edificate integral cu noţiuni mai simple. Dar de ce să fi asamblat elementele în acest fel când erau posibile mii de alte asamblări ? Datorită capriciului ? Dacă nu, de ce această combinaţie ar avea mai multe drepturi de existenţă decât celelalte ? Cărei nevoi îi răspunde ? Cum s-a prevăzut că ea va juca în dezvoltarea ştiinţei un rol important, că va prescurta raţionamentele şi calculele noastre ? Există în natură vreun obiect familiar care i-ar fi, ca să zicem aşa, imaginea indecisă şi grosieră ?

Mai mult. Dacă răspundeţi la toate aceste întrebări în mod satisfăcător, am vedea că nou-născutul avea dreptul să fie botezat. Dar nici alegerea numelui nu a fost arbitrară. Trebuie să explicăm ce analogii ne-au călăuzit şi că, dacă s-au dat nume analoage unor lucruri diferite, aceste lucruri cel puţin nu diferă decât prin materie şi se apropie prin formă ; că proprietăţile lor sunt analoage şi, ca să zicem aşa, paralele.

Cu acest preţ am putea mulţumi toate înclinaţiile. Dacă enunţul e destul de corect ca să placă logicianului, justificarea l-ar mulţumi pe intuitiv. Dar putem proceda şi mai bine. Ori de câte ori va fi posibil acest lucru, justificarea va precede enunţul şi îl va pregăti. Vom fi conduşi la enunţul general prin studiul câtorva exemple particulare.

Încă ceva : fiecare din părţile enunţului unei definiţii urmăreşte să distingă obiectul de definit de o clasă de alte obiecte apropiate. Definiţia nu va fi înţeleasă decât atunci când veţi fi arătat, nu doar

obiectul definit, ci şi obiectele înrudite de care trebuie să-l deosebiţi, când veţi fi făcut sesizabilă diferenţa şi veţi fi adăugat explicit : iată de ce enunţând definiţia, am spus aşa sau altfel.

Dar e timpul să depăşim generalităţile şi să examinăm în ce mod principiile cam abstracte pe care tocmai le-am expus pot fi aplicate în aritmetică, în geometrie, în analiză şi în mecanică.

Aritmetică

12. Nu e nevoie să definim numărul întreg. În schimb, se definesc de obicei operaţiile cu numerele întregi. Cred că elevii învaţă pe de rost aceste definiţii şi nu le dau nici un sens. Şi aceasta pentru două motive : mai întâi, ei sunt puşi să le înveţe prea devreme, când mintea lor nu resimte încă nici o nevoie de ele ; apoi, aceste definiţii nu sunt satisfăcătoare din punct de vedere logic. Pentru adunare nu se poate găsi o bună definiţie, pur şi simplu pentru că trebuie să te opreşti şi nu poţi defini totul. Se defineşte adunarea spunând doar că ea constă în adăugare. Tot ce se poate face e să pleci de la un anumit număr de exemple concrete şi să spui : operaţia pe care am făcut-o se numeşte adunare.

Altceva este în cazul scăderii ; o poţi defini logic ca operaţia inversă adunării. Dar aşa trebuie început ? Şi aici trebuie să începi cu exemple, să arăţi pe aceste exemple reciprocitatea celor două operaţii. Definiţia va fi astfel pregătită şi justificată.

La fel şi pentru înmulţire. Vei considera o problemă particulară ; vei arăta că ea poate fi rezolvată adunând mai multe numere egale între ele. Vei arăta apoi că se ajunge mai repede la rezultat prin înmulţire, operaţie pe care elevii ştiu deja s-o facă din obişnuinţă, şi definiţia logică va rezulta de aici cu totul firesc.

Vei defini împărţirea cu operaţia inversă înmulţirii. Dar vei începe cu un exemplu împrumutat de la noţiunea familiară de partaj şi vei arăta pe acest exemplu că înmulţirea reproduce dividendul.

Rămân operaţiile cu fracţiile. Nu există dificultăţi decât pentru înmulţire. Cel mai bine e să expui mai întâi teoria proporţiilor, şi

numai din ea va putea fi extrasă o definiţie logică. Dar pentru a face ca definiţiile întâlnite la începutul acestei teorii să fie acceptabile, trebuie să le pregătim prin numeroase exemple, luate din domeniul problemelor clasice ale regulei de trei simplă, unde vom avea grijă să introducem date fracţionare. Nu vom ezita nici să-i familiarizăm cu noţiunea de proporţie cu ajutorul imaginilor geometrice, fie apelând la amintirile lor, dacă au făcut deja geometrie, fie recurgând la intuiţia directă, dacă n-au făcut-o, ceea ce i-ar pregăti de altfel s-o facă. Aş adăuga, în sfârşit, că, după ce vor fi definit înmulţirea fracţiilor, trebuie să justificăm această definiţie, demonstrând că ea este comutativă, asociativă şi distributivă, şi făcându-i pe elevi să remarce că rostul acestei constatări este să justifice definiţia.

Se observă ce rol joacă în toate astea imaginile geometrice. Şi acest rol e justificat de filosofia şi istoria ştiinţei. Dacă aritmetica ar fi rămas complet separată de geometrie, ea n-ar fi cunoscut decât numărul întreg. Ea a inventat şi altceva tocmai pentru a se adapta nevoilor geometriei.

Geometrie

În geometrie întâlnim mai întâi noţiunea de linie dreaptă. Se poate defini linia dreaptă ? Definiţia cunoscută, drumul cel mai scurt de la un punct la altul, nu mă prea satisface. Aş pleca pur şi simplu de la *riglă* şi aş arăta mai întâi elevului cum se poate verifica o riglă prin răsturnare. Această verificare e adevărata definiţie a liniei drepte : linia dreaptă este o axă de rotaţie. Îl vom învăţa apoi să verifice rigla prin glisare şi vom avea una dintre proprietăţile cele mai importante ale liniei drepte. Cât priveşte cealaltă proprietate, de a fi drumul cel mai scurt între două puncte, ea este o teoremă care poate fi demonstrată în mod apodictic, dar demonstraţia e prea fină pentru a-şi putea găsi loc în învăţământul secundar. Ar fi mai bine să arătăm că o riglă verificată în prealabil se aplică pe un fir întins. În prezenţa unor dificultăţi asemănătoare, nu trebuie să ezităm a multiplica axiomele justificându-le prin experienţe grosiere.

Trebuie să admitem că, dacă acceptăm ceva mai multe axiome decât e strict necesar, păcatul nu e mare. Esenţial e să învăţăm să raţionăm corect pe axiomele odată acceptate. Unchiul Sarcey, căruia îi plăcea să se repete, spunea adesea că la teatru spectatorul acceptă bucuros toate postulatele care îi sunt impuse de la început, dar odată cortina ridicată, el devine intransigent în privinţa logicii. Ei bine, la fel e şi în matematici.

În cazul cercului, se poate pleca de la compas. Elevii vor recunoaşte dintr-o dată curba trasată. Îi vom face apoi să observe că distanţa dintre cele două vârfuri ale instrumentului rămâne constantă, că unul dintre aceste vârfuri este fix şi celălalt mobil, şi vom ajunge astfel în mod natural la definiţia logică.

Definiţia planului implică o axiomă şi nu trebuie s-o ascundem. Să luăm o planşă de desen şi să arătăm că o riglă mobilă se aplică în mod constant pe această planşă şi aceasta conservând trei grade de libertate. Vom compara cu cilindrul şi conul, suprafeţele pe care nu se poate aplica o dreaptă decât în cazul în care îi lăsăm doar două grade de libertate. Vom lua apoi trei planşe de desen. Vom arăta mai întâi că ele pot glisa rămânând aplicate una asupra celeilalte şi aceasta cu trei grade de libertate. Şi, în sfârşit, pentru a distinge planul de sferă, vom arăta că două din aceste planşe, aplicabile pe o a treia, sunt aplicabile una pe cealaltă.

Vă veţi mira poate de această întrebuinţare continuă a unor instrumente mobile. Nu e aici un artificiu grosier, e ceva mult mai filosofic decât se crede la început. Ce este geometria pentru filosof? Este studiul unui grup — grupul mişcărilor corpurilor solide. Cum să definim deci acest grup fără a face să se mişte câteva corpuri solide?

Trebuie oare să păstrăm definiţia clasică a paralelelor şi să spunem că numim astfel două drepte care, situate în acelaşi plan, nu se întâlnesc oricât de departe le-am prelungi? Nu, pentru că această definiţie este negativă, pentru că e neverificabilă prin experienţă şi în consecinţă nu poate fi privită ca o dată nemijlocită a conştiinţei. Nu, mai ales, pentru că ea este complet străină noţiunii de grup, considerării mişcării corpurilor solide care este, cum am spus-o, adevărata sursă a geometriei. N-ar fi mai bine să definim la început translaţia rectilinie a unei figuri invariabile ca o mişcare în

care toate punctele acestei figuri au traiectorii rectilinii şi să arătăm că o asemenea translaţie e posibilă, făcând ca un echer să gliseze pe o riglă ? Din această constatare experimentală erijată în axiomă va fi uşor să extragem noţiunea de paralelă şi însuşi postulatul lui Euclid.

Mecanică

Nu trebuie să revin asupra definiţiei vitezei, sau a acceleraţiei, sau a altor noţiuni cinematice ; le vom asocia cu folos noţiunii de derivată.

Aş insista, dimpotrivă, asupra noţiunilor dinamice de forţă şi masă.

Mă frapează un lucru : cât de departe sunt tinerii care au trecut prin şcoala secundară să aplice la lumea reală legile mecanice care le-au fost predate. Nu doar că sunt incapabili, nici nu se gândesc la aşa ceva. Pentru ei universul ştiinţei şi cel al realităţii sunt despărţite printr-o închidere etanşă. Nu rareori va fi un domn respectabil, probabil bacalaureat, aşezat în trăsură şi imaginându-şi că o ajută să înainteze înclinându-se înainte, şi aceasta în dispreţul principiului acţiunii şi reacţiei.

Dacă încercăm să analizăm starea de spirit a elevilor noştri, ne-ar mira mai puţin. Care este pentru ei adevărata definiţie a forţei ? Nu cea pe care o recită, ci aceea care, ascunsă într-un colţ al minţii lor, o dirijează de acolo integral. Iată definiţia : forţele sunt săgeţi cu care facem paralelograme. Aceste săgeţi sunt făpturi imaginare care n-au nimic de-a face cu nimic din ceea ce există în natură. Nu s-ar întâmpla acest lucru dacă le-am fi arătat forţe în realitate înainte de a le reprezenta prin săgeţi.

Cum să definim forţa ? După cum cred a fi arătat-o îndeajuns în altă parte, nu există o bună definiţie logică. Avem definiţia antropomorfică, senzaţia de efort muscular. Ea e cu adevărat prea grosieră şi nu putem obţine din ea nimic folositor.

Iată traseul care ar trebui urmat ; trebuie mai întâi, pentru a face cunoscut genul forţă, să arătăm una după alta toate speciile acestui gen ; ele sunt foarte numeroase şi foarte diverse : presiunea

fluidelor asupra pereţilor vaselor care le conţin ; tensiunea firelor ; elasticitatea unui resort ; gravitaţia care acţionează asupra tuturor moleculelor unui corp ; frecările ; acţiunea şi reacţia mutuală normală a două solide în contact.

Aceasta nu e decât o definiţie calitativă. Trebuie să învăţăm să măsurăm forţa. Pentru aceasta vom arăta mai întâi că putem înlocui o forţă cu alta fără a tulbura echilibrul. Vom găsi primul exemplu pentru această substituţie în balanţa şi cântărirea ale lui Borda. Vom arăta apoi că putem înlocui o greutate nu doar cu o altă greutate, ci şi cu forţe de natură diferită : de exemplu frâna lui Prony ne permite să înlocuim o greutate cu o frecare.

Din toate astea obţinem noţiunea de echivalenţă a două forţe.

Trebuie să definim direcţia unei forţe. Dacă o forţă F este echivalentă cu o altă forţă F' care este aplicată corpului considerat prin intermediul unui fir întins, astfel ca F să poată fi înlocuit cu F' fără ca echilibrul să fie tulburat, atunci punctul de aderenţă al firului va fi prin definiţie punctul de aplicaţie al forţei F' şi cel al forţei echivalente F. Direcţia firului va fi direcţia forţei F' şi cea a forţei echivalente F.

De aici se va trece la compararea mărimii forţelor. Dacă o forţă poate înlocui alte două forţe de aceeaşi direcţie, înseamnă că este egală cu suma lor. Se va arăta, de pildă, că o greutate de 20 de grame poate înlocui două greutăţi de câte zece grame.

E suficient ? Nu încă. Ştim acum să comparăm intensitatea a două forţe care au aceeaşi direcţie şi acelaşi punct de aplicaţie. Trebuie să învăţăm s-o facem atunci când direcţiile sunt diferite. Pentru aceasta, să imaginăm un fir întins de o greutate şi trecând pe o roată de scripete. Vom spune că tensiunea celor două capete ale firului este aceeaşi şi egală cu greutatea tensor.

Aceasta este definiţia noastră. Ea ne permite să comparăm tensiunile celor două capete şi, folosindu-ne de definiţiile precedente, să comparăm două forţe oarecare având aceeaşi direcţie cu aceste două capete. Trebuie s-o justificăm arătând că tensiunea ultimului capăt rămâne aceeaşi pentru o aceeaşi greutate tensor, oricare ar fi numărul şi dispunerea roţilor de transmisiune. Trebuie apoi s-o completăm arătând că lucrul acesta nu e adevărat decât dacă roţile sunt lipsite de frecare.

Odată stăpâni pe aceste definiţii, trebuie arătat că punctul de aplicaţie, direcţia şi intensitatea sunt suficiente pentru a determina o forţă ; că două forţe pentru care aceste trei elemente sunt aceleaşi sunt *totdeauna* echivalente şi pot fi *totdeauna* înlocuite una cu alta, fie în echilibru, fie în mişcare, oricare ar fi celelalte forţe puse în joc.

Trebuie arătat că două forţe concurente pot fi totdeauna înlocuite printr-o rezultantă unică ; şi că *această rezultantă rămâne aceeaşi* în condiţiile în care corpul este în repaus sau în mişcare şi oricare ar fi celelalte forţe care îi sunt aplicate.

În sfârşit, trebuie arătat că forţele definite în felul în care am făcut-o satisfac principiul de egalitate al acţiunii şi reacţiei.

Despre toate astea singură experienţa ne poate învăţa.

Ar fi de ajuns să citãm experienţe comune, pe care elevii le fac în fiecare zi fără să se îndoiască de ele, şi să efectuăm în faţa lor câteva experienţe simple şi bine alese. După ce vom fi trecut prin toate aceste ocoluri vom putea reprezenta forţele prin săgeţi, şi aş dori chiar ca, în dezvoltarea raţionamentelor, să se revină din când în când de la simbol la realitate. N-ar fi greu, de exemplu, să ilustrăm paralelogramul cu ajutorul unui aparat format din trei fire, trase pe scripeţi, întinse de greutăţi şi care se echilibrează acţionând asupra aceluiaşi punct.

Cunoscând forţa, e uşor să definim masa. De data asta definiţia trebuie împrumutată de la dinamică. Nu se poate face altfel, pentru că scopul urmărit e acela de a face să se înţeleagă distincţia între masă şi greutate. Şi aici definiţia trebuie să fie pregătită prin experienţe. Există într-adevăr o maşină care pare făcută anume pentru a arăta ce este masa — maşina lui Atwood. Vom reaminti pe de altă parte legile căderii corpurilor, faptul că acceleraţia gravitaţiei este aceeaşi pentru corpurile uşoare, şi că ea variază cu latitudinea etc.

Acum, dacă-mi spuneţi că toate metodele pe care le preconizez sunt demult aplicate în licee, mai mult m-aş bucura decât m-aş mira. Ştiu că în ansamblu învăţământul nostru matematic e bun. Nu doresc ca el să fie revoluţionat, m-ar mâhni chiar aşa ceva. Nu doresc decât ameliorări lent progresive. Nu trebuie ca acest învăţământ să sufere oscilaţii bruşte după vântul capricios al unor mode efemere. În asemenea furtuni s-ar scufunda îndată înalta lor

valoare educativă. O bună şi solidă logică trebuie să continue a-i constitui fondul. Definiţia, de pildă, este totdeauna necesară, dar ea trebuie să pregătească definiţia logică, nu s-o înlocuiască. Ea trebuie cel puţin să ne facă s-o dorim, în cazurile în care adevărata definiţie logică nu poate fi dată în mod util decât în învăţământul superior.

Aţi înţeles bine că ceea ce am spus astăzi nu implică defel abandonarea a ce am scris altundeva. Am avut deseori ocazia să critic unele definiţii pe care le preconizez acum. Aceste critici se menţin intacte. Aceste definiţii nu pot fi decât provizorii. Dar trebuie să trecem prin ele.

CAPITOLUL III

Matematicile şi logica

Introducere

Pot fi reduse matematicile la logică fără a trebui să facem apel la principii care să le fie proprii ? Există o întreagă şcoală, plină de ardoare şi credinţă, care se străduieşte s-o facă. Ea are limbajul său special în care nu mai există cuvinte şi în care se folosesc numai semne. Acest limbaj nu este înţeles decât de câţiva iniţiaţi, încât profanii sunt dispuşi să se încline în faţa afirmaţiilor tranşante ale adepţilor. Nu e poate inutil să examinăm aceste afirmaţii ceva mai de aproape, pentru a vedea dacă ele îndreptăţesc tonul peremptoriu cu care sunt prezentate.

Dar pentru a face să se înţeleagă bine natura chestiunii, este necesar să intrăm în câteva detalii istorice şi să reamintim în particular natura lucrărilor lui Cantor.

Noţiunea de infinit a fost introdusă demult în matematici. Dar acest infinit era ceea ce filosofii numesc o *devenire*. Infinitul matematic nu era decât o cantitate susceptibilă de a creşte dincolo de orice limită. Era o cantitate variabilă despre care nu se putea spune că *a depăşit* toate limitele, ci doar că *le va depăşi*.

Cantor a încercat să introducă în matematici un *infinit actual*, adică o cantitate care nu doar că e susceptibilă de a depăşi toate limitele, ci e considerată ca şi cum le-ar fi depăşit deja. El şi-a pus întrebări de felul : există mai multe puncte în spaţiu decât numere întregi ? Există mai multe puncte în spaţiu decât puncte într-un plan ? etc.

Şi atunci numărul numerelor întregi, cel al punctelor din spaţiu etc. constituie ceea ce el numeşte un *număr cardinal transfinit*, adică un număr cardinal mai mare decât toate numerele cardinale obişnuite. Şi el s-a amuzat să compare aceste numere cardinale

transfinite. Aranjând într-o ordine convenabilă elementele unei mulţimi care conţine o infinitate de mulţimi, el a imaginat şi ceea ce a numit numere ordinale transfinite, asupra cărora nu voi insista.

Numeroşi matematicieni s-au lansat pe urmele sale şi şi-au pus o serie de întrebări de acelaşi gen. Ei s-au familiarizat atât de mult cu numerele transfinite, încât au ajuns să subordoneze teoria numerelor finite teoriei numerelor cardinale a lui Cantor. Ei consideră că, pentru a preda aritmetica într-un mod cu adevărat logic, ar trebui început prin a stabili proprietăţile generale ale numerelor cardinale transfinite, a distinge printre ele o clasă foarte mică, cea a numerelor întregi obişnuite. S-ar putea ajunge, prin acest ocol, la demonstrarea tuturor propoziţiilor relative la această clasă restrânsă (adică toată aritmetica şi algebra noastră) fără a ne folosi de nici un principiu exterior logicii.

Această metodă este evident contrară oricărei psihologii sănătoase. Nu aşa, fără îndoială, a procedat mintea omenească pentru a construi matematicile. De aceea cred că autorii ei nu au de gând s-o introducă în învăţământul secundar. Dar măcar este ea logică, sau mai bine zis corectă ? Ne putem îndoi.

Geometrii care au întrebuinţat-o sunt totuşi foarte numeroşi. Ei au acumulat formulele şi au crezut că se eliberează de tot ce depăşeşte logica pură scriind memorii în care formulele nu mai alternează cu discursul explicativ ca în cărţile de matematici obişnuite, ci din care acest discurs a dispărut complet.

Din nefericire, ei au ajuns la rezultate contradictorii, ceea ce se cheamă *antinomiile cantoriene*, asupra cărora vom avea prilejul să revenim. Aceste contradicţii nu i-au descurajat şi ei s-au străduit să verifice regulile în aşa fel încât să facă să dispară contradicţiile care se manifestaseră deja, fără să fie astfel asiguraţi că n-or să apară altele noi.

1

În ultimii ani au fost publicate numeroase lucrări despre matematicile pure şi filosofia matematicilor, cu scopul de a degaja

şi izola elementele logice ale raţionamentului matematic. Aceste lucrări au fost analizate şi expuse foarte clar de Couturat într-o carte intitulată *Principiile matematicilor.*

Couturat consideră că lucrările noi, şi mai cu seamă cele ale lui Russell şi Peano, au tranşat definitiv dezbaterea de atâta vreme pendinte între Leibniz şi Kant. Ei au arătat că nu există judecată sintetică *a priori* (cum spunea Kant pentru a desemna judecăţile care nu pot fi nici demonstrate analitic, nici reduse la identităţi, nici stabilite experimental). Ei au arătat că matematicile sunt integral reductibile de logică şi că intuiţia nu joacă aici nici un rol.

E ceea ce Couturat a expus în lucrarea citată mai sus. E ceea ce a spus el şi mai clar în discursul consacrat comemorării lui Kant, încât l-am auzit pe vecinul meu zicând cu jumătate de voce : „Se vede bine că suntem la centenarul *morţii* lui Kant".

Putem oare subscrie la această condamnare definitivă ? Eu n-o cred, şi voi încerca să arăt de ce.

2

Ceea ce ne izbeşte de la început în cazul noii matematici este caracterul ei pur formal : „Să concepem, spune Hilbert, trei feluri de *lucruri* pe care le vom numi puncte, drepte şi planuri ; să convenim că o dreaptă va fi determinată de două puncte şi că în loc de a spune că acea dreaptă e determinată de cele două puncte am putea spune că dreapta trece prin cele două puncte sau că cele două puncte sunt situate pe acea dreaptă". Ce anume sunt aceste *lucruri* nu doar că n-o ştim defel, dar nici nu trebuie să încercăm s-o ştim. Nu avem nevoie de aşa ceva. O persoană care n-ar fi văzut niciodată nici punct, nici dreaptă, nici plan ar putea face geometria la fel de bine ca noi. Expresia *a trece prin* sau expresia *a fi situat pe* nu provoacă în noi nici o imagine, prima este sinonimă cu *a fi determinat* şi a doua cu *a determina.*

Se înţelege, aşadar, că pentru a demonstra o teoremă nu este necesar, nici măcar util, să-i cunoaştem semnificaţia. Geometrul ar putea fi înlocuit cu *pianul de raţionat* imaginat de Stanley Jevons. Sau, dacă preferaţi, am putea imagina o maşină în care s-ar intro-

duce axiomele la un capăt în timp ce am culege teoremele la celălalt capăt, asemenea acelei maşini legendare din Chicago în care porcii intră vii şi din care ies transformaţi în jamboane şi cârnaţi. Aidoma acestor maşini, matematicianul nu are nevoie să înţeleagă ceea ce face.

Nu-i reproşez lui Hilbert caracterul formal al geometriei sale. Spre aşa ceva trebuia să tindă, dată fiind problema pe care şi-o punea. El voia să reducă la minim numărul axiomelor fundamentale ale geometriei şi să le enumere complet. Or, în raţionamentele în care mintea noastră rămâne activă, în cele în care intuiţia mai joacă un rol, în raţionamentele vii, ca să zicem aşa, e dificil să nu introducem o axiomă sau un postulat care trece neobservat. Aşadar, numai după ce va fi redus toate raţionamentele geometrice la o formă pur mecanică, el a putut fi sigur că i-a reuşit planul şi că şi-a încheiat opera.

Ceea ce Hilbert a făcut pentru geometrie, alţii au vrut să facă pentru analiză. Chiar dacă ar fi reuşit pe deplin, ar fi kantienii condamnaţi definitiv la tăcere ? Poate că nu, căci reducând gândirea la o formă vidă, e sigur că o mutilăm. Să admitem chiar a se fi stabilit că toate teoremele pot fi deduse prin proceduri pur analitice, prin simple combinări logice ale unui număr finit de axiome şi că aceste axiome nu sunt decât convenţii. Filosoful şi-ar păstra dreptul de a cerceta originile acestor convenţii, de a vedea de ce au fost ele socotite preferabile convenţiilor contrare.

Şi apoi, corectitudinea logică a raţionamentelor care duc de la axiome la teoreme nu e singurul lucru de care trebuie să ne preocupăm. Regulile logicii perfecte epuizează oare întreaga matematică ? E ca şi cum ai spune că toată arta judecătorului de şah se reduce la regulile mutării pieselor. Printre toate construcţiile pe care le putem combina cu materialele oferite de logică, trebuie să efectuăm o alegere. Adevăratul geometru efectuează această alegere în mod judicios pentru că este călăuzit de un instinct sigur, sau de o conştiinţă vagă a nu ştiu cărei geometrii mai profunde şi mai ascunse, care singură constituie valoarea edificiului construit.

Cercetarea originii acestui instinct, studiul legilor acestei geometrii profunde care sunt simţite dar nu enunţate ar constitui încă o frumoasă sarcină pentru filosofii care nu vor ca totul să se

reducă la logică. Dar eu nu voi adopta acest punct de vedere, nu aşa vreau eu să pun problema. Instinctul de care vorbeam e necesar inventatorului, dar la început se pare că ne-am putea dispensa de el în studiul ştiinţei, deja create. Ei bine, eu vreau să cercetez dacă e adevărat că, odată admise principiile logicii, e posibil, nu spun să descoperim, dar să demonstrăm toate adevărurile matematice fără a face din nou apel la intuiţie.

3

Am răspuns altădată negativ la această întrebare (Vezi *Ştiinţă şi ipoteză*, cap. I). Trebuie modificat acel răspuns datorită lucrărilor recente ? Dacă răspunsesem că nu, e pentru că „principiul inducţiei complete" mi se părea în acelaşi timp necesar matematicianului şi ireductibil la logică. E cunoscut enunţul acestui principiu : „Dacă o proprietate e adevărată pentru numărul 1, şi dacă se stabileşte că ea e adevărată pentru $n + 1$ cu condiţia de a fi adevărată pentru n, ea va fi adevărată pentru toate numerele întregi". Vedeam aici raţionamentul matematic prin excelenţă. Nu voiam să spun, cum s-a crezut, că toate raţionamentele matematice se pot reduce la o aplicaţie a acestui principiu. Dacă examinăm aceste raţionamente puţin mai atent, am vedea aplicate în ele multe alte principii asemănătoare, care prezintă aceleaşi trăsături esenţiale. În această categorie de principii, cel al inducţiei complete este doar cel mai simplu şi de aceea l-am ales ca tip.

Denumirea de principiu al inducţiei complete care a prevalat nu e îndreptăţită. Acest mod de raţionare nu e mai puţin o adevărată inducţie matematică ce nu diferă de inducţia obişnuită decât prin certitudinea sa.

4. Definiţii şi axiome

Existenţa unor asemenea principii constituie o dificultate pentru logicienii intransigenţi. Cum pretind ei că se debaresează de ele ? Principiul inducţiei complete, spun aceştia, nu este o axiomă în

sens propriu sau o judecată sintetică *a priori*. E pur şi simplu definiţia numărului întreg, deci o simplă convenţie. Pentru a discuta acest fel de a vedea, trebuie să examinăm mai de aproape relaţiile între definiţii şi axiome.

Să ne referim mai întâi la un articol al lui Couturat despre definiţiile matematice, care a apărut în „Învăţământul matematic", revistă publicată la Gauthier-Villars şi la Georg în Geneva. Vom vedea aici o distincţie între *definiţia directă* şi *definiţia prin postulate*.

„Definiţia prin postulate, spune Couturat, se aplică nu unei singure noţiuni, ci unui sistem de noţiuni. Ea constă în a enumera relaţiile fundamentale care le unesc şi care permit a demonstra toate celelalte proprietăţi ; aceste relaţii sunt postulate ..."

Dacă s-au definit în prealabil toate acele noţiuni, mai puţin una, atunci aceasta din urmă va fi prin definiţie obiectul care verifică aceste postulate.

Anumite axiome nedemonstrabile din matematici nu ar fi astfel decât definiţii deghizate. Acest punct de vedere este adesea legitim şi l-am admis eu însumi în ceea ce priveşte, de exemplu, postulatul lui Euclid.

Celelalte axiome din geometrie nu sunt suficiente pentru a defini complet distanţa. Distanţa s-ar afla atunci, prin definiţie, printre toate mărimile care satisfac aceste alte axiome, cea care face ca postulatul lui Euclid să fie adevărat.

Ei bine, logicienii admit pentru principiul inducţiei complete ceea ce admit eu pentru postulatul lui Euclid, ei nu vor să vadă în el decât o definiţie deghizată.

Dar ca să ai acest drept, trebuie îndeplinite două condiţii. Stuart Mill spunea că orice definiţie implică o axiomă — aceea prin care se afirmă existenţa obiectului definit. Din acest punct de vedere, nu axioma ar putea fi o definiţie deghizată, dimpotrivă, definiţia ar fi o axiomă deghizată. Stuart Mill înţelegea cuvântul *existenţă* într-un sens material şi empiric. El vroia să spună că, definind cercul, se afirmă că există lucruri rotunde în natură.

Sub această formă, opinia lui este inadmisibilă. Matematicile sunt independente de existenţa obiectelor materiale. În matematici, cuvântul *a exista* nu poate avea decât un sens, el înseamnă lipsit de

contradicţie. Aşa rectificat, gândul lui Stuart Mill devine exact. Definind un obiect, se afirmă că definiţia nu implică o contradicţie.

Dacă avem deci un sistem de postulate şi dacă putem demonstra că aceste postulate nu implică nici o contradicţie, am avea dreptul să le considerăm ca reprezentând definiţia uneia dintre noţiunile care figurează în el. Dacă nu putem demonstra, trebuie s-o admitem fără demonstraţie, ceea ce ar fi atunci o axiomă. Încât, dacă am vrea să căutăm definiţia sub postulat, am regăsi axioma sub definiţie.

Pentru a arăta că o definiţie nu implică o contradicţie, cel mai adesea se procedează *prin exemplificare*, se încearcă formarea unui exemplu de obiect care satisface definiţia. Să considerăm cazul unei definiţii prin postulate. Vrem să definim o noţiune A şi spunem că, prin definiţie, un A este orice obiect pentru care anumite postulate sunt adevărate. Dacă putem demonstra direct că toate aceste postulate sunt adevărate pentru un anumit obiect B, definiţia ar fi justificată. Obiectul B ar fi un exemplu de A. Am fi atunci siguri că postulatele nu sunt contradictorii, pentru că există cazuri în care ele sunt adevărate toate în acelaşi timp.

Nu este însă totdeauna posibilă o asemenea demonstraţie directă prin exemplu.

Pentru a stabili că postulatele nu implică o contradicţie, trebuie considerate toate propoziţiile pe care le putem deduce din aceste postulate socotite ca premise şi să arătăm că, printre aceste propoziţii, nu există două care să se contrazică între ele. Dacă numărul acestor propoziţii este finit, e posibilă o verificare directă. Puţin frecvent, acest caz este, de altfel, şi puţin interesant.

Dacă numărul acestor propoziţii este infinit, nu se poate face verificarea directă ; trebuie recurs la procedee de demonstraţie unde în general vom fi obligaţi să invocăm acel principiu al inducţiei complete pe care trebuie tocmai să-l verificăm.

Am explicat una din condiţiile pe care logicienii trebuie s-o satisfacă, şi *vom vedea mai departe că n-am făcut-o*.

5

Există şi o a doua condiţie. Atunci când dăm o definiţie, o facem pentru a ne folosi de ea.

Vom regăsi deci în continuarea discursului cuvântul definit. Avem oare dreptul să afirmăm despre obiectul reprezentat de acest cuvânt, postulatul care a servit drept definiţie ? Da, evident, dacă cuvântul şi-a păstrat sensul, dacă nu-i atribuim implicit un sens diferit. Dar uneori tocmai acest lucru se întâmplă şi cel mai adesea e greu să ne dăm seama. Trebuie să vedem cum a fost introdus acel cuvânt în discursul nostru, şi dacă poarta pe care a intrat nu implică în realitate o altă definiţie decât cea care a fost enunţată.

Această dificultate se prezintă în toate aplicaţiile matematice. Noţiunea matematică a primit o definiţie foarte abstractă şi foarte riguroasă. Pentru matematicianul pur a dispărut orice ezitare. Dar dacă vrem s-o aplicăm în ştiinţele fizice, de exemplu, nu mai avem de-a face cu noţiunea pură, ci cu un obiect concret care adeseori e doar o imagine grosieră a noţiunii. A spune că acel obiect satisface, cel puţin aproximativ, definiţia, înseamnă a enunţa un adevăr nou, pe care numai experienţa îl poate certifica şi care nu mai are caracterul de postulat convenţional.

Aceeaşi dificultate o întâlnim însă şi fără a ieşi din matematicile pure.

Dai numărului o definiţie subtilă ; după aceea nu te mai gândeşti la definiţia dată, pentru că, în realitate, nu ea te-a învăţat ce este numărul, o ştiai de mult, şi atunci când cuvântul număr se regăseşte mai târziu sub pana ta, îi dai acelaşi sens ca şi primul venit. Pentru a şti care este acest sens şi dacă el este acelaşi de la o frază la alta, trebuie văzut cum ai ajuns să vorbeşti despre număr şi să introduci acest cuvânt în cele două fraze. Deocamdată nu mă explic mai mult asupra subiectului, căci vom avea ocazia să revenim.

Avem deci un cuvânt căruia i-am dat explicit o definiţie A. Îi dăm apoi în discurs o utilizare care presupune implicit o altă definiţie B. E posibil ca cele două definiţii să desemneze un acelaşi obiect. Dar faptul că aşa stau lucrurile constituie un adevăr nou pe care trebuie fie să-l demonstrăm, fie să-l admitem ca pe o axiomă independentă.

Vom vedea mai departe că logicienii n-au îndeplinit a doua condiţie mai bine decât pe prima.

6

Definiţiile numărului sunt foarte numeroase şi foarte diverse. Renunţ să înşir chiar şi numele autorilor lor. Nu e de mirare că există atâtea. Dacă una dintre ele era satisfăcătoare, nu s-ar mai fi dat alta nouă. Dacă fiecare nou filosof care s-a ocupat de această problemă a găsit de cuviinţă că trebuie să inventeze o altă definiţie, înseamnă că nu era mulţumit de cele ale predecesorilor săi, şi nu era mulţumit deoarece credea că observă prezenţa în ele a unei *petitio principii*.

Citind scrierile consacrate acestei probleme, am resimţit mereu un profund sentiment de jenă. Mă aşteptam de fiecare dată să mă lovesc de o petiţie de principiu şi, atunci când n-o observam imediat, mă temeam că n-am privit bine.

Această situaţie ţine de faptul că este imposibil să dai o definiţie fără să enunţi o frază şi că e greu să enunţi o frază fără a introduce în ea un nume de număr, sau cel puţin cuvântul *mai mulţi*, sau măcar un cuvânt la plural. Şi atunci panta e lunecoasă şi rişti în fiecare clipă să cazi în petiţia de principiu.

Nu mă voi referi în continuare decât la acele definiţii în care petiţia de principiu este cel mai abil disimulată.

7. Pasigrafia

Limbajul simbolic creat de Peano joacă un foarte mare rol în aceste noi cercetări. El ne poate face unele servicii, dar mi se pare că Couturat îi acordă o importanţă exagerată, care trebuie că l-a mirat pe însuşi Peano.

Elementul esenţial al acestui limbaj îl constituie anumite semne algebrice care reprezintă diferitele conjuncţii : dacă, şi, sau, deci. E posibil ca aceste semne să fie comode. Altceva este însă pretenţia că ele ar fi destinate să reînnoiască întreaga filosofie. E greu să admitem că, atunci când îl scriem ɔ, cuvântul *dacă* dobândeşte o virtute pe care n-o avea când îl scriam *dacă*.

Această invenţie a lui Peano s-a numit la început *pasigrafie*, adică arta de a scrie un tratat de matematici fără a întrebuinţa nici

un cuvânt din limba uzuală. Denumirea îi definea foarte exact semnificaţia. Ulterior a fost ridicată la o demnitate şi mai înaltă, conferindu-i titlul de *logistică*. Se pare că acest cuvânt este întrebuinţat de Şcoala de război pentru a desemna arta şefului de stat major — arta de a pune în mişcare şi de a cantona trupele. Dar aici nu avem a ne teme de nici o confuzie şi se observă imediat că această nouă denumire implică proiectul de a revoluţiona logica.

Putem vedea la lucru noua metodă într-un memoriu matematic al lui Burali-Forti, intitulat : *Una Questione sui numeri transfiniti*, şi inserat în tomul XI al *Rendi conti del circolo matematico di Palermo.*

Mărturisesc din capul locului că acest memoriu este foarte interesant. Îl iau aici ca exemplu tocmai pentru că este cel mai important dintre toate memoriile care au fost scrise în noul limbaj. De altfel, profanii îl pot citi graţie unei traduceri interlineare italiene.

Importanţa memoriului rezidă în aceea că a fost primul exemplu de antinomii pe care le întâlnim în studiul numerelor transfinite şi care de câţiva ani i-au adus la disperare pe matematicieni. Scopul acestei note, spune Burali-Forti, este de a arăta că pot exista două numere transfinite (ordinale), a şi b, astfel ca a să nu fie egal cu b, nici mai mare, nici mai mic.

Cititorul nu trebuie să se neliniştească pentru consideraţiile care vor urma, el nu are nevoie să ştie ce este un număr ordinal transfinit.

Or, Cantor demonstrase tocmai că între două numere transfinite, ca şi între două numere finite, nu poate exista o altă relaţie decât egalitatea sau inegalitatea într-un sens sau în altul. Dar nu despre fondul acestui memoriu vreau să vorbesc aici. Asta m-ar îndepărta prea mult de subiectul meu. Vreau să mă ocup doar de formă. Mă întreb tocmai dacă această formă îl face să câştige mult în rigoare şi dacă ea compensează astfel eforturile pe care le impune celui ce scrie şi celui ce citeşte.

Vedem mai întâi că Burali-Forti defineşte numărul 1 în felul următor :

$$I = \iota T' \{ \kappa_0 \frown (u, h) \in (u \in \mathrm{Un}) \},$$

definiţie destinată prin excelenţă să dea o idee despre numărul 1 persoanelor care nu vor fi auzit niciodată vorbindu-se despre el.

Înţeleg prea prost peaniana ca să îndrăznesc să risc o critică, dar mă tem ca această definiţie să nu conţină o petiţie de principiu, dat fiind că observ 1 ca cifră în primul termen şi *Unu* în litere în al doilea.

Oricum, Burali-Forti pleacă de la această definiţie şi, după un scurt calcul, ajunge la ecuaţia :

$$(27)\quad \iota\varepsilon\ \mathrm{No}$$

care ne spune că Unu este un număr.

Şi pentru că tot vorbim despre definiţiile primelor numere, reamintim că şi Couturat a definit deopotrivă pe 0 şi 1.

Ce este zero ? Este numărul elementelor clasei nule. Şi ce este clasa nulă ? Este clasa care nu conţine nici un element.

A-l defini pe zero prin *nul* şi pe *nul* prin *nici un*, înseamnă într-adevăr a abuza de bogăţia limbii uzuale. De aceea Couturat a introdus o perfecţionare în definiţia sa, scriind :

$$0 = \iota\Lambda : \varphi x = \Lambda .\ \supset .\Lambda = (x\varepsilon\varphi x),$$

ceea ce în limba obişnuită înseamnă : zero este numărul obiectelor ce satisfac o condiţie care nu este niciodată îndeplinită.

Dar cum *niciodată* înseamnă în *nici un caz*, nu văd că s-ar fi realizat un progres considerabil.

Mă grăbesc să adaug că definiţia dată de Couturat numărului 1 este mai satisfăcătoare.

Unu, spune el în substanţă, este numărul elementelor unei clase ale cărei două elemente oarecare sunt identice.

Ea e mai satisfăcătoare, spuneam, în sensul că pentru a-l defini pe 1, el nu se foloseşte de cuvântul *unu* ; în schimb, se foloseşte de cuvântul *doi*. Mă tem însă că dacă l-aş întreba pe Couturat ce este *doi*, ar fi obligat să se folosească de cuvântul *unu*.

8

Să revenim însă la memoriul lui Burali-Forti. Spuneam că concluziile sale se află în opoziţie directă cu cele ale lui Cantor. Or, într-o zi am fost vizitat de Hadamard. Am discutat şi despre această antinomie.

„Raţionamentul lui Burali-Forti, i-am zis, nu vi se pare ireproşabil ?

— Nu, şi, dimpotrivă, nu găsesc nimic de obiectat raţionamentului lui Cantor. De altfel, Burali-Forti nu avea dreptul să vorbească de mulţimea *tuturor* numerelor ordinale.

— Scuzaţi-mă, avea acest drept pentru că putea totdeauna afirma :

$$\Omega = T' (No, \varepsilon >).$$

Aş vrea să ştiu cine l-ar fi putut împiedica s-o facă, şi se poate spune că un obiect nu există atunci când l-ai numit Ω ?"

A fost în zadar, nu l-am putut convinge (ceea ce, de altfel, ar fi fost neplăcut, pentru că avea dreptate). Se datora acest lucru doar faptului că eu nu vorbeam peaniana cu suficientă elocvenţă ? Poate. Dar între noi n-o cred.

Astfel, în ciuda întregului acest aparat pasigrafic, chestiunea nu era rezolvată. Ce dovedeşte asta ? Câtă vreme este vorba doar de a demonstra că unu este un număr, pasigrafia e suficientă, dar dacă apare o dificultate, dacă avem de rezolvat o antinomie, pasigrafia devine neputincioasă.

CAPITOLUL IV

Logicile noi

1. Logica lui Russell

Pentru a-şi justifica pretenţiile, logica a trebuit să se transforme. Am asistat la apariţia unor logici noi, dintre care cea mai interesantă este logica lui Russell. Se părea că despre logica formală nu se mai poate scrie nimic nou şi că Aristotel a epuizat-o. Dar câmpul pe care Russell îl atribuie logicii este infinit mai larg decât cel al logicii clasice şi el a găsit mijloace de a emite asupra acestui subiect vederi originale şi uneori juste.

În primul rând, în timp ce logica lui Aristotel era înainte de orice logica claselor, care pleca de la relaţia subiectului cu predicatul, Russell subordonează logica claselor logicii propoziţiilor. Silogismul clasic : „Socrate este om" etc., face loc silogismului ipotetic : Dacă *A* e adevărat, *B* e adevărat, iar dacă *B* e adevărat, *C* e adevărat etc. Aceasta este, după părerea mea, o idee dintre cele mai fericite, căci silogismul clasic este uşor de redus la silogismul ipotetic, în timp ce transformarea inversă nu se face fără dificultate.

Dar nu numai atât : logica propoziţiilor a lui Russell este studiul legilor după care se combină conjuncţiile *dacă*, *şi*, *sau* şi negaţia *nu*. E o extindere considerabilă a vechii logici. Proprietăţile silogismului clasic se extind fără dificultate la silogismul ipotetic şi, în formele acestuia din urmă, se recunosc cu uşurinţă formele scolastice ; se regăseşte ceea ce este esenţial în logica clasică. Dar teoria silogismului nu este încă decât sintaxa conjuncţiei *dacă* şi poate a negaţiei.

Adăugând alte două cuvinte, *şi* şi *sau*, Russell deschide logicii un domeniu nou. Semnele *şi*, *sau* urmează aceleaşi legi ca cele două semne × şi +, adică legile comutativă, asociativă şi distributivă.

Astfel *şi* reprezintă înmulţirea logică, în timp ce *sau* reprezintă adunarea logică. Acest lucru este de asemenea interesant.

B. Russell ajunge la concluzia că o propoziţie falsă oarecare implică toate celelalte propoziţii adevărate sau false. Couturat spune că această concluzie ar părea paradoxală la prima vedere. E suficient însă să fi corectat o teză proastă de matematică pentru a recunoaşte câtă dreptate are Russell. Candidatul întâmpină adesea multe dificultăţi în a găsi prima ecuaţie falsă. Odată obţinută însă, nu mai e decât un joc pentru el să acumuleze rezultatele cele mai surprinzătoare, dintre care unele pot fi chiar exacte.

2

După cum se vede, noua logică este mult mai bogată decât logica clasică. Simbolurile s-au înmulţit şi permit combinări variate, *al căror număr nu mai este limitat*. Avem dreptul să extindem astfel sensul cuvântului *logică* ? Ar fi de prisos să examinăm această chestiune şi să-i căutăm lui Russell o simplă ceartă de cuvinte. Să recunoaştem cerinţele lui ; dar să nu ne mirăm dacă anumite adevăruri, care fuseseră declarate ireductibile la logică, în sensul vechi al cuvântului, au devenit reductibile la logică, în sensul nou, care este cu totul diferit.

Am introdus multe noţiuni noi care nu sunt simple combinări ale celor vechi. De altfel, Russell nu s-a înşelat în această privinţă, şi nu doar la începutul primului capitol, adică al logicii propoziţiilor, ci şi la începutul capitolelor al doilea — logica claselor — şi al treilea — logica relaţiilor —; el introduce cuvinte noi pe care le declară indefinibile.

Mai mult, el introduce şi principii pe care le declară indemonstrabile. Dar aceste principii indemonstrabile sunt apeluri la intuiţie, judecăţi sintetice *a priori*. Noi le considerăm ca intuitive atunci când le întâlneam, mai mult sau mai puţin explicit enunţate, în tratatele de matematici. Şi-au schimbat ele natura datorită faptului că sensul cuvântului logică s-a lărgit şi că le găsim acum într-o carte intitulată *Tratat de logică* ? *Nu şi-au schimbat natura ; şi-au schimbat doar locul.*

3

Ar putea fi considerate aceste principii ca definiţii deghizate ? Ar trebui, pentru aceasta, să putem demonstra că ele nu implică o contradicţie. Ar trebui stabilit că, oricât am continua şirul deducţiilor, nu ne vom expune niciodată pericolului de a ne contrazice.

Am putea încerca să raţionăm după cum urmează. Putem verifica faptul că operaţiile noii logici aplicate la premise lipsite de contradicţie nu pot da decât consecinţe deopotrivă lipsite de contradicţie. Dacă deci după *n* operaţii nu am întâlnit o contradicţie, n-o vom întâlni nici după *n+1*. E deci imposibil să existe un moment în care contradicţia *începe*, ceea ce arată că n-o să apară niciodată. Avem dreptul să raţionăm astfel ? Nu, căci asta ar însemna să facem inducţie completă ; şi, reamintim, *nu cunoaştem încă* principiul inducţiei complete.

Nu avem deci dreptul să privim aceste axiome ca pe nişte definiţii deghizate. Nu ne rămâne decât o posibilitate, trebuie să admitem pentru fiecare dintre ele un nou act de intuiţie. Cred că aceasta este, de altfel, gândirea lui Russell şi Couturat.

Astfel, fiecare din cele nouă noţiuni indefinibile şi din cele douăzeci de propoziţii indemonstrabile (cred că dacă eu le-aş fi numărat, aş fi găsit ceva mai multe) care constituie fundamentul logicii noi, al logicii în sens larg, presupune un act nou şi independent al intuiţiei noastre şi, de ce să n-o spunem, o veritabilă judecată sintetică *a priori*. În această privinţă toată lumea pare a fi de acord, dar ceea ce susţine Russell, şi *mi se pare îndoielnic*, e că *după aceste apeluri la intuiţie nu ar mai fi nevoie de altele şi că întreaga matematică s-ar putea constitui fără intervenţia nici unui alt element nou*.

4

Couturat repetă adesea că această logică nouă este absolut independentă de ideea de număr. Nu mă voi amuza să socotesc câte adjective numerale, atât cardinale cât şi ordinale, sau adjective indefinite, cum ar fi *mai multe*, conţine expunerea sa. Să citãm totuşi câteva exemple :

„Produsul logic a *două* sau *mai multe* propoziţii este ..." ;
„Toate propoziţiile pot lua numai *două* valori, adevărul şi falsul";
„Produsul relativ a *două* relaţii este o relaţie" ;
„O relaţie se stabileşte între *doi* termeni" etc., etc.

Uneori acest inconvenient nu ar fi imposibil de evitat, alteori el este esenţial. O relaţie este de neînţeles fără doi termeni ; este imposibil să ai intuiţia relaţiei, fără să ai în acelaşi timp intuiţia celor doi termeni ai ei, şi fără să remarci că aceştia sunt doi, căci, pentru ca relaţia să poată fi concepută, trebuie ca ei să fie doi şi numai doi.

5. Aritmetica

Ajung la ceea ce Couturat numeşte *teoria ordinală* şi care constituie fundamentul aritmeticii propriu-zise. Couturat începe prin a enunţa cele cinci axiome ale lui Peano, care sunt independente, cum au demonstrat-o Peano şi Padoa.

1. Zero este un număr întreg.
2. Zero nu este succesorul nici unui număr întreg.
3. Succesorul unui întreg este un întreg la care ar trebui adăugat orice întreg are un succesor.
4. Două numere întregi sunt egale, dacă succesorii lor sunt egali.

Axioma a 5-a este principiul inducţiei complete.

Couturat consideră aceste axiome ca fiind definiţii deghizate ; ele constituie definiţia prin postulate a lui zero, a „succesorului" şi a numărului întreg.

Am văzut însă că, pentru ca o definiţie prin postulate să poată fi acceptată, trebuie să putem stabili că ea nu implică o contradicţie.

Este cazul aici ? Câtuşi de puţin.

Demonstraţia nu se poate face *prin exemplu*. Nu putem să alegem o parte din numerele întregi, de exemplu primele trei, şi să demonstrăm că ele satisfac definiţia.

Dacă iau seria 0, 1, 2, observ că ea satisface axiomele 1, 2, 4 şi 5 ; dar, pentru a satisface axioma 3, mai trebuie ca 3 să fie un întreg

şi, în consecinţă, ca seria 0, 1, 2, 3 să satisfacă axiomele ; verificăm că ea satisface axiomele 1, 2, 4, 5, dar axioma 3 cere, în plus, ca 4 să fie un întreg şi ca seria 0, 1, 2, 3, 4 să satisfacă axiomele ş.a.m.d.

Este deci imposibil să demonstrăm axiomele pentru câteva numere întregi fără a le demonstra pentru toate. Trebuie să renunţăm la demonstraţia prin exemplu.

E nevoie atunci să considerăm toate consecinţele axiomelor noastre şi să vedem dacă nu conţin o contradicţie. Dacă numărul acestor consecinţe ar fi finit, lucrul s-ar dovedi uşor de făcut. Dar numărul lor este infinit ; e vorba de întreaga matematică, sau cel puţin de întreaga aritmetică.

Ce-i de făcut atunci ? Poate că, la rigoare, s-ar putea repeta raţionamentul din paragraful III.

Dar, aşa cum spuneam, *acest raţionament este o inducţie completă* şi ar trebui atunci justificat însuşi principiul inducţiei complete.

6. Logica lui Hilbert

Ajung acum la lucrarea capitală a lui Hilbert, pe care a comunicat-o la Congresul matematicienilor de la Heidelberg, şi a cărei traducere franceză datorată lui Pierre Boutroux a apărut în *L'enseignement mathématique*, în timp ce o traducere în engleză datorată lui Halsted apărea în *The Monist*. În această lucrare, unde întâlnim ideile cele mai profunde, autorul urmăreşte un obiectiv asemănător cu cel al lui Russell, dar în multe puncte el se îndepărtează de înaintaşul său.

„Totuşi, spune Hilbert, dacă privim de aproape, constatăm că în principiile logice, aşa cum se obişnuieşte să fie prezentate, sunt implicate deja anumite noţiuni aritmetice, de exemplu noţiunea de mulţime, şi într-o anumită măsură noţiunea de număr. Ne găsim astfel prinşi într-un cerc şi tocmai de aceea, pentru a evita orice paradox, mi s-a părut necesar să dezvolt simultan principiile logicii şi principiile aritmeticii."

Am văzut mai sus că ceea ce spune Hilbert despre principiile logicii *aşa cum obişnuim să le prezentăm*, se aplică în egală măsură logicii lui Russell. Astfel, pentru Russell, logica este anterioară aritmeticii. Pentru Hilbert, ele sunt „simultane". Vom întâlni mai departe alte diferenţe şi mai profunde. Dar le vom semnala pe măsură ce se vor prezenta. Prefer să urmez pas cu pas desfăşurarea gândirii lui Hilbert, citând textual pasajele cele mai importante.

„Să considerăm mai întâi obiectul *I*". Observăm că acţionând astfel nu implicăm defel noţiunea de număr, deoarece se înţelege că *I* nu este aici decât un simbol şi că nu ne preocupăm deloc să-i cunoaştem semnificaţia. „Grupele formate cu acest obiect, repetat de două, trei sau mai multe ori..." Ah ! de această dată e cu totul altceva : dacă introducem cuvintele *două*, *trei* şi mai ales *mai multe*, introducem noţiunea de număr. Şi atunci definiţia numărului întreg finit pe care o vom găsi îndată, ar sosi foarte târziu. Autorul era mult prea avizat ca să nu-şi dea seama de această petiţie de principiu. De aceea, la sfârşitul lucrării sale, încearcă să procedeze la o adevărată *refăţuire* (*replâtrage*).

Hilbert introduce apoi două obiecte simple *I* şi = şi consideră toate combinările acestor două obiecte, toate combinările combinărilor lor etc. Se înţelege de la sine că trebuie să uităm semnificaţia obişnuită a acestor două semne şi să nu le atribuim nici una. El repartizează apoi aceste combinări în două clase, cea a existenţelor şi cea a non-existenţelor şi până la un nou ordin această repartiţie e complet arbitrară. Orice propoziţie afirmativă ne spune că o combinare aparţine clasei existenţelor ; orice propoziţie negativă ne spune că o anumită combinare aparţine clasei non-existenţelor.

7

Să marcăm acum o diferenţă de cea mai mare importanţă. Pentru Russell, un obiect *oarecare* pe care îl desemnează prin x este un obiect absolut, nedeterminat şi în legătură cu care nu presupune nimic ; pentru Hilbert, e una dintre combinările formate cu ajutorul

simbolurilor *I* şi = ; e de neconceput că s-ar putea introduce altceva decât combinări de obiecte deja definite. De altfel, Hilbert îşi formulează gândul cu toată claritatea, şi cred că trebuie să reproduc *in extenso* enunţul său. „Nedeterminatele care figurează în axiome (în locul lui *oricare* sau *toţi* din logica obişnuită) reprezintă în exclusivitate mulţimea obiectelor şi a combinărilor pe care le-am dobândit deja în starea actuală a teoriei sau pe care suntem pe cale de a le introduce. Aşadar, atunci când vom deduce unele propoziţii din axiomele considerate, vom avea dreptul să înlocuim nedeterminatele doar cu aceste obiecte şi cu aceste combinări. N-ar trebui să uităm nici că, atunci când sporim numărul obiectelor fundamentale, axiomele dobândesc prin aceasta o nouă extensiune şi trebuie, în consecinţă, să fie din nou verificate şi la nevoie modificate".

Contrastul cu felul de a vedea al lui Russell este total. Pentru acest din urmă filosof, putem pune în locul lui *x* orice şi nu doar obiecte cunoscute. Russell este credincios punctului său de vedere — cel al comprehensiunii. El pleacă de la ideea generală de existenţă şi o îmbogăţeşte progresiv restrângând-o, adăugându-i calităţi noi. Dimpotrivă, Hilbert nu recunoaşte ca existenţe posibile decât combinări de obiecte deja cunoscute, încât (neprivind decât unul din aspectele gândirii sale) s-ar putea spune că el adoptă punctul de vedere al extensiunii.

8

Să continuăm expunerea ideilor lui Hilbert. El introduce două axiome pe care le enunţă în limbajul său simbolic dar care semnifică, în limbajul profanilor ca noi, că orice cantitate este egală cu ea însăşi şi că orice operaţie efectuată asupra a două cantităţi identice dă rezultate identice. Aşa enunţate, ele sunt evidente, iar a le prezenta în acest fel înseamnă a trăda gândirea lui Hilbert. Pentru el, matematicile nu au a combina decât pure simboluri şi un adevărat matematician trebuie să raţionezc pe ele fără a se preocupa de sensul lor. De aceea axiomele sale nu sunt pentru el ceea ce sunt pentru omul de rând.

El consideră că axiomele reprezintă definiţia prin postulate a simbolului = lipsit până aici de orice semnificaţie. Dar pentru a justifica o astfel de definiţie, trebuie arătat că aceste două axiome nu duc la nici o contradicţie.

Pentru aceasta Hilbert se foloseşte de raţionamentul din paragraful III, dar nu pare a-şi da seama că face inducţie completă.

9

Sfârşitul memoriului lui Hilbert este cu totul enigmatic şi nu vom insista asupra lui. Contradicţiile se acumulează aici. Se simte că autorul este vag conştient de petiţia de principiu pe care a comis-o şi că încearcă în zadar să retencuiască fisurile raţionamentului său.

Ce e de spus ? *Tocmai când trebuia să demonstreze că definiţia numărului întreg prin axioma inducţiei complete nu implică nici o contradicţie, Hilbert se eschivează, aidoma lui Russell şi Couturat, pentru că dificultatea e prea mare.*

10. Geometria

Geometria, spune Couturat, este un vast corp de doctrină în care nu intervine principiul inducţiei complete. Afirmaţia e adevărată într-o anumită măsură, dar nu se poate spune că nu intervine, ci că intervine puţin. Dacă ne referim la *Rational Geometry* de Halsted (New-York, John Wiley and Sons, 1904), elaborată după principiile lui Hilbert, observăm că principiul inducţiei intervine pentru prima dată la pagina 114 (dacă nu cumva n-am văzut bine, ceea ce e posibil).

Astfel, geometria, care, abia cu câţiva ani în urmă, părea a fi domeniul unde dominarea intuiţiei era necontestată, e acum domeniul în care logisticienii par a triumfa. Nimic nu ne-ar permite să măsurăm mai bine importanţa lucrărilor geometrice ale lui Hilbert şi amprenta profundă pe care au lăsat-o asupra contemporanilor noştri.

Dar nu trebuie să ne înşelăm în această privinţă. *Care este în definitiv teorema fundamentală a Geometriei ? Aceea că axiomele geometriei nu implică nici o contradicţie, fapt care nu se poate demonstra fără principiul inducţiei.*

Cum demonstrează Hilbert acest punct esenţial ? Sprijinindu-se pe Analiză şi, prin ea, pe Aritmetică, şi, prin aceasta, pe principiul inducţiei.

Şi dacă vreodată s-ar inventa o altă demonstraţie, ar trebui să ne sprijinim tot pe acest principiu, întrucât numărul consecinţelor posibile ale axiomelor, despre care trebuie să arătăm că nu sunt contradictorii, este infinit.

11. Concluzie

Prima noastră concluzie este aceea că *principiul inducţiei nu poate fi privit drept definiţia deghizată a numărului întreg.*

Fie trei adevăruri :

Principiul inducţiei complete ;

Postulatul lui Euclid ;

Legea fizică după care fosforul se topeşte la 44° (citată de Le Roy).

Se spune : acestea sunt trei definiţii deghizate, prima — a numărului întreg, a doua — a liniei drepte, a treia — a fosforului.

Admit acest lucru pentru a doua, nu şi pentru celelalte două. Trebuie să explic motivul acestei aparente inconsecvenţe.

În primul rând, am văzut că o definiţie nu este acceptabilă decât dacă s-a stabilit că nu implică nici o contradicţie. Am arătat, de asemenea, că pentru prima definiţie această demonstraţie este imposibilă. Aminteam că, dimpotrivă, pentru a doua Hilbert a dat o demonstraţie completă.

Cât priveşte a treia definiţie, e clar că ea nu implică o contradicţie : dar asta înseamnă oare că definiţia respectivă garantează, cum ar trebui s-a facă, existenţa obiectului definit ? Nu mai suntem aici în domeniul ştiinţelor matematice, ci în cel al ştiinţelor fizice, şi cuvântul *existenţă* nu mai are acelaşi sens, el nu mai semnifică absenţa contradicţiei, ci existenţa obiectivă.

Observăm deja o primă raţiune a distincţiei pe care o fac între cele trei cazuri. Există şi o a doua.

În aplicaţiile acestor trei noţiuni, ni se prezintă ele ca definite prin cele trei postulate ?

Aplicaţiile posibile ale principiului inducţiei sunt nenumărabile. Să luăm de exemplu una dintre aplicaţiile expuse mai sus, şi în care încercăm să stabilim că o mulţime de axiome nu poate conduce la o contradicţie. Pentru aceasta se consideră una dintre seriile de silogisme pe care o putem continua plecând de la aceste axiome ca premise.

Atunci când am sfârşit al n-lea silogism, observăm că mai putem face unul, al $n + 1$-lea. Astfel numărul n serveşte la numărarea unei serii de operaţii succesive ; este un număr care poate fi obţinut prin adiţionări succesive. E deci un număr plecând de la care se poate ajunge la unitate prin *scăderi succesive*. N-am putea-o face, evident, dacă am avea $n = n - 1$, pentru că atunci prin scădere am regăsi mereu acelaşi număr. Aşadar, modul în care am fost determinaţi să considerăm acest număr n implică o definiţie a numărului întreg finit. Această definiţie este următoarea : *un număt întreg finit este numărul care poate fi obţinut prin adiţionări succesive, numărul care este astfel încât* n *nu este egal cu* n — 1.

Odată admis acest lucru, ce facem ? Arătăm că, dacă n-a existat contradicţie la al n-lea silogism, nu va exista nici la $n + 1$-lea, şi conchidem că nu va exista niciodată. Veţi spune : am dreptul să conchid astfel, pentru că numerele întregi sunt prin definiţie acelea pentru care un asemenea raţionament este legitim. Dar asta implică o altă definiţie a numărului întreg, care este următoarea : *un număr întreg este numărul asupra căruia putem raţiona prin recurenţă*. În cazul nostru, este numărul despre care se poate spune că, dacă inexistenţa unei contradicţii în momentul unui silogism al cărui număr este întreg atrage după sine inexistenţa unei contradicţii în momentul silogismului al cărui număr este întregul următor, n-avem a ne teme de nici o contradicţie pentru nici unul dintre silogismele al căror număr este întreg.

Cele două definiţii nu sunt identice ; ele sunt fără îndoială echivalente, dar această echivalenţă se datorează unei judecăţi sintetice *a priori*. Nu se poate trece de la una la alta prin procedee pur

logice. În consecinţă, nu avem dreptul s-o adoptăm pe a doua, după ce vom fi introdus numărul întreg pe o cale ce o presupune pe prima.

Dimpotrivă, ce se-ntâmplă în cazul liniei drepte ? Am explicat de atâtea ori încât ezit s-o mai spun o dată. Mă limitez să rezum pe scurt concepţia mea.

Nu avem, ca în cazul precedent, două definiţii echivalente ireductibile logic una la cealaltă. Avem o singură definiţie exprimabilă în cuvinte. S-ar spune că mai există una pe care o simţim fără s-o putem enunţa pentru că avem intuiţia liniei drepte sau pentru că ne reprezentăm linia dreaptă. În primul rând, nu ne-o putem reprezenta în spaţiul geometric, ci numai în spaţiul reprezentativ, şi apoi ne putem reprezenta la fel de bine obiectele care posedă celelalte proprietăţi ale liniei drepte, în afara aceleia de a satisface postulatul lui Euclid. Aceste obiecte sunt „dreptele neeuclidiene" care dintr-un anumit punct de vedere nu sunt entităţi lipsite de sens, ci cercuri (cercuri adevărate din spaţiul adevărat) ortogonale unei anumite sfere. Dacă, printre aceste obiecte susceptibile de reprezentare în egală măsură, le numim drepte pe cele dintâi (dreptele euclidiene) şi nu pe ultimele (dreptele neeuclidiene), o facem prin definiţie.

Şi dacă ajungem, în sfârşit, la al treilea exemplu, la definiţia fosforului, considerăm că adevărata definiţie ar fi : fosforul este această bucată de materie pe care o văd aici în flacon.

12

Şi pentru că am atins acest subiect, încă un cuvânt. Referitor la exemplul cu fosforul, am spus : „Această propoziţie este o veritabilă lege fizică verificabilă, căci ea semnifică : toate corpurile care au toate celelalte proprietăţi ale fosforului, mai puţin punctul său de topire, se topesc ca şi el la 44°". Şi mi s-a răspuns : „Nu, această lege nu este verificabilă, căci dacă s-ar întâmpla să verificăm că două corpuri care seamănă cu fosforul se topesc unul la 44° şi celălalt la 50°, s-ar putea spune oricând că există fără îndoială, în afara punctului de topire, vreo altă proprietate necunoscută prin care ele diferă".

Nu tocmai asta am vrut să spun ; ar fi trebuit să scriu : toate corpurile care au cutare şi cutare proprietăţi în număr finit (anume proprietăţile fosforului care sunt enunţate în tratatele de chimie, cu excepţia punctului de topire) se topesc la 44°.

Şi pentru a pune mai bine în evidenţă diferenţa între cazul dreptei şi cel al fosforului, să mai facem o remarcă. Dreapta îşi află în natură numeroase imagini mai mult sau mai puţin imperfecte, dintre care principalele sunt razele de lumină şi axa de rotaţie a unui corp solid. Presupun că se constată că raza de lumină nu satisface postulatul lui Euclid (arătând, de exemplu, că o stea are o paralaxă negativă). Ce-am face în acest caz ? Am conchide că dreapta, întrucât este prin definiţie traiectoria luminii, nu satisface postulatul, sau, dimpotrivă, că, întrucât dreapta satisface prin definiţie postulatul, raza de lumină nu este rectilinie ?

Fără îndoială, suntem liberi să adoptăm o definiţie sau pe cealaltă şi deci o concluzie sau pe cealaltă. Dar ar fi stupid s-o adoptăm pe cea dintâi, pentru că raza de lumină nu satisface probabil decât în mod imperfect nu numai postulatul lui Euclid, ci şi celelalte proprietăţi ale liniei drepte ; pentru că, dacă se abate de la dreapta euclidiană, ea nu se abate mai puţin de la axa de rotaţie a corpurilor solide, care constituie o altă imagine imperfectă a liniei drepte ; în sfârşit, pentru că este cu siguranţă supusă schimbării, încât cutare linie care era dreaptă ieri va înceta să fie mâine, dacă o împrejurare fizică s-a schimbat.

Să presupunem acum că se descoperă că fosforul nu se topeşte la 44°, ci la 43,9°. Ce concluzie am trage : că fosforul fiind prin definiţie ceea ce se topeşte la 44°, această substanţă pe care o numim fosfor nu e fosfor adevărat, sau, dimpotrivă, că fosforul se topeşte la 43,9° ? Suntem liberi şi în acest caz să adoptăm o definiţie sau pe cealaltă şi, în consecinţă, o concluzie sau pe cealaltă. Ar fi însă stupid s-o adoptăm pe cea dintâi, pentru că nu se poate schimba numele unei substanţe ori de câte ori se determină o nouă zecimală a punctului ei de topire.

13

În rezumat, Russell şi Hilbert au făcut, fiecare, un efort riguros. Ei au scris, fiecare, o carte plină de vederi originale, profunde şi adesea foarte corecte. Aceste două cărţi ne vor da mult de reflectat şi avem multe de învăţat din ele. Printre rezultatele lor, unele, chiar multe, sunt solide şi hărăzite să dureze.

A spune însă că ele au tranşat definitiv dezbaterea între Kant şi Leibniz şi au ruinat teoria kantiană a matematicilor, este evident inexact. Nu ştiu dacă realmente ei au crezut că au făcut-o, dar dacă au crezut aşa ceva, s-au înşelat.

CAPITOLUL V

Ultimele eforturi ale logisticienilor

1

Logisticienii au încercat să răspundă la consideraţiile precedente. Pentru aceasta, ei au fost obligaţi să transforme logistica. Russell mai ales şi-a modificat în anume privinţe vederile iniţiale. Fără a intra în detaliile dezbaterii, aş vrea să revin asupra următoarelor două întrebări, care mi se par cele mai importante : regulile logisticii şi-au produs oare dovezile de fecunditate şi infailibilitate ? Este adevărat că ele permit demonstrarea principiului inducţiei complete fără nici un apel la intuiţie ?

2. Infailibilitatea logisticii

În ceea ce priveşte fecunditatea, se pare că Couturat îşi face iluzii naive. Logistica, după el, oferă invenţiei „catalige şi aripi", şi, la pagina următoare : „*Sunt zece ani* de când Peano a publicat prima ediţie a *Formularului* său".

Cum se face că de zece ani aveţi aripi şi n-aţi zburat încă !

Am cea mai mare stimă pentru Peano, care a făcut lucruri foarte nostime (de exemplu curba sa care umple o întreagă suprafaţă) ; dar în definitiv el nu a mers nici mai departe, nici mai sus, nici mai repede decât majoritatea matematicienilor lipsiţi de aripi, şi ar fi putut s-o facă la fel de bine cu picioarele sale.

Dimpotrivă, eu nu văd în logistică decât obstacole pentru inventator. Ea nu ne face să câştigăm în concizie, departe de asta, şi dacă sunt necesare 27 de ecuaţii pentru a stabili că 1 este un număr, câte ne-ar trebui pentru a demonstra o adevărată teoremă ?

Dacă distingem, împreună cu Whitehead, individul x, clasa al cărui singur membru este x şi care se va numi ιx, apoi clasa al cărei singur membru este clasa al cărei singur membru este x şi se va numi $\iota\iota x$, putem crede că aceste distincţii, oricât de utile ar fi, ne uşurează sensibil mersul ?

Logistica ne obligă să spunem tot ceea ce de obicei se subînţelege. Ea ne obligă să înaintăm pas cu pas. E poate mai sigur, dar nu e mai rapid.

Nu aripi ne daţi, ci hamuri în care e ţinut copilul care învaţă să meargă. Şi atunci avem dreptul să cerem ca aceste hamuri să ne împiedice să cădem. Ar fi singura lor scuză. Atunci când o valoare nu aduce profituri mari, trebuie să fie măcar un plasament de tată de familie.

Trebuie să urmăm orbeşte regulile voastre ? Da, altfel singură intuiţia ne-ar permite să le deosebim. Dar atunci trebuie ca ele să fie infailibile. Numai într-o autoritate infailibilă poţi avea o încredere oarbă. E deci o necesitate pentru voi. Veţi fi infailibili ori nu veţi fi deloc.

Nu aveţi dreptul să ne spuneţi : „Ne înşelăm, e adevărat, dar şi voi vă înşelaţi". Pentru noi, faptul de a ne înşela e o nefericire, o mare nefericire, pentru voi este moartea.

Nu spuneţi nici : oare infailibilitatea aritmeticii împiedică greşelile de adunare ? Regulile calculului sunt infailibile, şi totuşi îi vedem înşelându-se *pe cei care nu aplică aceste reguli* ; verificând însă calculul lor, s-ar observa imediat când anume le-au încălcat. Logisticienii *au aplicat* regulile lor şi au ajuns la contradicţie. E atât de adevărat acest lucru, încât sunt gata să schimbe regulile şi „să sacrifice noţiunea de clasă". De ce să fie schimbate dacă erau infailibile ?

„Nu suntem obligaţi, spuneţi, să rezolvăm *hic et nunc* toate problemele posibile". O, nu vă cerem atâta ! Dacă, în faţa unei probleme, n-aţi da *nici o* soluţie, n-am avea nimic de zis ; dar, dimpotrivă, ne daţi *două* soluţii care sunt contradictorii şi din care una cel puţin este falsă — ceea ce constituie un eşec.

Russell caută să concilieze aceste contradicţii, ceea ce, după el, nu se poate face „decât restrângând sau chiar sacrificând noţiunea de clasă". Şi Couturat, scontând pe succesul acestei tentative,

adaugă : „Dacă logisticienii reuşesc acolo unde ceilalţi au eşuat, Poincaré va consimţi să-şi reamintească această frază şi să preţuiască Logistica pentru acea soluţie".

Ba nu : Logistica există, ea are codul său care a cunoscut deja patru ediţii ; sau mai curând tocmai acest cod este Logistica însăşi. E pregătit Russell să arate că cel puţin unul din cele două raţionamente contradictorii a transgresat acest cod ? Câtuşi de puţin, el e gata să schimbe legi şi să abroge o parte din ele. Dacă reuşeşte, voi preţui intuiţia lui Russell, iar nu Logistica peaniană pe care o va fi distrus.

3. Libertatea de contradicţie

Am formulat două obiecţii principale la adresa definiţiei numărului întreg adoptată de logisticieni. Ce răspunde Couturat la prima obiecţie ?

Ce semnifică în matematici cuvântul a exista ? Semnifică, am spus, a fi lipsit de contradicţie. Couturat contestă acest lucru. „Existenţa logică, spune el, este cu totul altceva decât absenţa contradicţiei. Ea constă în faptul că o clasă nu este vidă. A spune : «Există obiecte a, înseamnă, prin definiţie, a afirma că clasa a nu este nulă.» Şi, fără îndoială, a afirma că clasa a nu este nulă, înseamnă, prin definiţie, a afirma că există obiecte a. Dar una din cele două afirmaţii e la fel de lipsită de sens ca şi cealaltă, dacă ele nu semnifică amândouă fie că putem vedea sau atinge obiecte a — acesta este sensul pe care li-l dau fizicienii sau naturaliştii —, fie că putem concepe un a fără să ajungem la contradicţii — acesta e sensul pe care li-l dau logicienii şi matematicienii."

Nu non-contradicţia dovedeşte existenţa, pentru Couturat, ci invers, existenţa dovedeşte non-contradicţia. Pentru a stabili existenţa unei clase, trebuie deci să stabilim, cu ajutorul unui exemplu, că există un individ care aparţine acestei clase. „Dar, se va spune, cum se demonstrează existenţa acestui individ ? Nu trebuie ca această existenţă să fie stabilită ca să putem deduce din ea existenţa clasei din care face parte ? — Ei bine, nu. Oricât de paradoxală ar părea această aserţiune, nu se demonstrează niciodată existenţa

unui individ. Indivizii, doar pentru că sunt indivizi, sunt întotdeauna consideraţi ca existenţi. Nu trebuie niciodată să exprimi faptul că un individ există, absolut vorbind, ci numai că el există într-o clasă". Couturat găseşte paradoxală propria sa afirmaţie şi, desigur, nu este singurul. Ea trebuie totuşi să aibă un sens. El vrea să spună, fără îndoială, că existenţa unui individ, singur pe lume, şi despre care nu se afirmă nimic, nu poate duce la contradicţie. Câtă vreme ar fi absolut singur, este evident că n-ar putea deranja pe nimeni. Ei bine, fie, vom admite existenţa individului, „absolut vorbind", dar cu asta n-avem ce face ; va trebui să demonstraţi existenţa individului „într-o clasă" şi pentru aceasta va trebui iarăşi să demonstraţi că afirmaţia : cutare individ aparţine cutărei clase, nu este contradictorie nici în ea însăşi, nici cu celelalte postulate adoptate.

„A putea susţine, continuă Couturat, că o definiţie nu este valabilă decât dacă se demonstrează că nu e contradictorie înseamnă deci a emite o exigenţă arbitrară şi abuzivă". Nu s-ar putea revendica în termeni mai energici şi mai orgolioşi libertatea de contradicţie. „În orice caz, *onus probandi* incumbă celor ce cred că aceste principii sunt contradictorii". Postulatele sunt presupuse comparabile până la proba contrarie, la fel cum un acuzat este presupus nevinovat.

Inutil să adaug că nu subscriu la această revendicare. Dar, spuneţi voi, demonstraţia pe care ne-o cereţi este imposibilă şi nu ne puteţi soma „să pună mâna pe lună". Pardon, asta e imposibil pentru voi, nu şi pentru noi cei care admitem principiul inducţiei ca pe o judecată sintetică *a priori*. Şi acest lucru ar fi necesar şi pentru voi şi pentru noi.

Pentru a demonstra că un sistem de postulate nu implică o contradicţie, trebuie să aplicăm principiul inducţiei complete ; acest mod de raţionare nu numai că nu are nimic „bizar", dar este singurul corect. Nu e „neverosimil" că a fost totdeauna întrebuinţat ; şi nu e greu să-i găsim „exemple şi precedente". Eu am citat în articolul meu două asemenea exemple, împrumutate din memoriul lui Hilbert. El nu e singurul care s-a folosit de acest raţionament şi cei care n-au făcut-o n-au avut dreptate. Ceea ce i-am reproşat eu lui Hilbert nu e faptul de a fi recurs la el (un matematician de rasă ca

el nu putea să nu vadă că era necesară o demonstraţie şi că aceasta era singura posibilă), ci faptul de a fi făcut-o fără să recunoască aici raţionamentul prin recurenţă.

4. A doua obiecţie

Semnalaşem o a doua eroare a logisticienilor în articolul lui Hilbert. Azi Hilbert este excomunicat şi Couturat nu-l mai priveşte ca pe un logistician. Mi se va pune deci întrebarea dacă am găsit aceeaşi greşeală la logisticienii ortodocşi. Nu, n-am văzut-o în paginile pe care le-am citit. Şi nu ştiu dacă aş găsi-o în cele trei sute de pagini pe care le-am scris şi pe care n-am chef să le citesc.

Numai că vor fi obligaţi s-o comită în momentul în care vor dori să obţină din ştiinţa matematică o aplicaţie oarecare. Această ştiinţă nu are drept unic obiectiv să-şi contemple de-a pururi propriul buric. Ea vine în atingere cu natura şi în acel moment va trebui să se debaraseze de definiţiile pur verbale şi să nu se mai plătească în cuvinte.

Să revenim la exemplul lui Hilbert. E vorba tot de raţionamentul prin recurenţă şi de problema de a şti dacă un sistem de postulate nu este contradictoriu. Fără nici o îndoială, Couturat mi-ar spune că lucrul acesta nu-l priveşte ; i-ar interesa poate pe cei ce nu revendică, asemenea lui, libertatea de contradicţie.

Vrem să stabilim, ca şi mai sus, că nu vom întâlni nici o contradicţie, după un număr oarecare de raţionamente, oricât de mare dorim, cu condiţia ca acest număr să fie finit. Pentru aceasta, trebuie să aplicăm principiul inducţiei. Suntem obligaţi oare să înţelegem aici, prin număr finit, orice număr la care se aplică prin definiţie principiul inducţiei ? Evident, nu, altfel am fi conduşi la consecinţele cele mai jenante.

Pentru a avea dreptul de a stabili un sistem de postulate, trebuie să fim asiguraţi că ele nu sunt contradictorii. Acest adevăr e admis de *majoritatea* savanţilor, aş fi scris *de toţi* înainte de a fi citit ultimul articol al lui Couturat. Dar ce semnifică acest adevăr ? Semnifică el oare faptul că trebuie să fim siguri că nu întâlnim o contradicţie după un număr *finit* de propoziţii, numărul *finit* fiind prin

definiţie cel care are toate proprietăţile de natură recurentă, astfel încât dacă una dintre aceste proprietăţi ar lipsi, dacă, de exemplu, am ajunge la o contradicţie, *am conveni* să spunem că numărul respectiv nu este finit ?

Cu alte cuvinte, vrem oare să spunem : trebuie să fim siguri că nu întâlnim o contradicţie, cu condiţia de a conveni să ne oprim tocmai în clipa în care am fi pe punctul de a întâlni una ? E suficient să enunţăm o asemenea propoziţie pentru a o condamna.

Aşadar, nu numai că raţionamentul lui Hilbert presupune principiul inducţiei, dar el spune că acest principiu ne este dat, nu ca o simplă definiţie, ci ca o judecată sintetică *a priori*.

În rezumat :

O demonstraţie este necesară.

Singura demonstraţie posibilă este demonstraţia prin recurenţă.

Ea nu este legitimă decât dacă se admite principiul inducţiei şi dacă îl privim nu ca pe o definiţie, ci ca pe o judecată sintetică.

5. Antinomiile cantoriene

Voi examina acum noul memoriu al lui Russell. El a fost scris pentru a învinge dificultăţile ridicate de acele *antinomii cantoriene* la care am făcut deja aluzii frecvente. Cantor crezuse că poate constitui o Ştiinţă a Infinitului. Alţii au înaintat pe calea deschisă de el, dar s-au izbit de contradicţii ciudate. Aceste contradicţii sunt deja numeroase, dar cele mai cunoscute sunt :

1. Antinomia Burali-Forti ;
2. Antinomia Zermelo-König ;
3. Antinomia Richard.

Cantor a demonstrat că numerele ordinale (e vorba de numerele ordinale transfinite, noţiune nouă introdusă de el) pot fi aranjate într-o serie lineară, cu alte cuvinte că din două numere ordinale inegale, există întotdeauna unu care este mai mic decât celălalt. Burali-Forti demonstrează contrariul. Într-adevăr, el spune, în substanţă, că dacă am putea ordona *toate* numerele ordinale într-o serie lineară, această serie ar defini un număr ordinal

care va fi mai mare decât *toate* celelalte. S-ar putea apoi adăuga la ea 1 şi s-ar obţine încă un număr ordinal care ar fi şi mai mare — ceea ce este contradictoriu.

Vom reveni mai târziu asupra antinomiei Zermelo-König, care e de o natură puţin diferită. Iată cum se prezintă antinomia Richard (*Revue Générale des Sciences*, 30 iunie 1905). Să considerăm toate numerele zecimale care pot fi definite cu ajutorul unui număr finit de cuvinte. Aceste numere zecimale formează o mulţime M, şi e uşor de văzut că această mulţime este numărabilă, altfel zis, că putem *numerota* diversele numere zecimale ale acestei mulţimi de la 1 până la infinit. Să presupunem numerotarea efectuată şi să definim un număr N în felul următor. Dacă a n-a zecimală a celui de-al n-lea număr al mulţimii M este :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

a n-a zecimală a lui N ar fi :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1.

După cum se vede, N nu este egal cu al n-lea număr din M şi cum n este oarecare, N nu aparţine lui M şi totuşi N ar trebui să aparţină acestei mulţimi pentru că l-am definit cu ajutorul unui număr finit de cuvinte.

Vom vedea mai târziu că Richard a dat el însuşi, cu multă înţelepciune, explicaţia paradoxului său şi că explicaţia sa se poate extinde, *mutatis mutandis*, la celelalte paradoxe asemănătoare. Russell citează şi o altă antinomie destul de amuzantă.

Care este cel mai mic număr întreg pe care nu-l putem defini printr-o frază formată din mai puţin de o sută de cuvinte româneşti ?

Acest număr există. Într-adevăr, numerele care pot fi definite printr-o asemenea frază sunt evident în număr finit întrucât cuvintele din limba română nu sunt în număr infinit. Va exista deci printre ele unul care va fi mai mic decât toate celelalte.

Pe de altă parte, acest număr nu există, pentru că definiţia lui implică o contradicţie. Într-adevăr, acest număr este definit prin fraza în italice care e formată din mai puţin de o sută de cuvinte româneşti. Şi prin definiţie acest număr nu trebuie să poată fi definit printr-o asemenea frază.

6. Zigzag-theory şi no-classes-theory

Care este atitudinea lui Russell faţă de aceste contradicţii ? După ce le va fi analizat pe cele despre care tocmai am vorbit şi după ce va fi citat şi altele, după ce le va fi dat o formă care ne duce cu gândul la Epimenide, el nu ezită să conchidă :

„A propositional function of one variable does not always determine a class". O funcţie propoziţională (adică o definiţie) nu determină totdeauna o clasă. O „propositional function" sau „norm" poate fi „non-predicativă". Şi aceasta nu înseamnă că acele propoziţii non-predicative determină o clasă vidă, o clasă nulă ; aceasta nu înseamnă că nu există nici o valoare a lui x care să satisfacă definiţia şi care să poată fi unul dintre elementele clasei. Elementele există, dar ele nu au dreptul să se asocieze pentru a forma o clasă.

Dar asta e doar începutul şi trebuie să ştim să recunoaştem dacă o definiţie este sau nu predicativă. Pentru a rezolva această problemă, Russell ezită între trei teorii pe care le numeşte :

A. The zigzag theory ;

B. The theory of limitation of size ;

C. The no classes theory.

După *zigzag theory* : „definiţiile (funcţii propoziţionale) determină o clasă atunci când sunt foarte simple şi nu încetează s-o facă decât atunci când sunt complicate şi obscure". Cine să hotărască acum dacă o definiţie poate fi privită ca suficient de simplă pentru a fi acceptabilă ? La această întrebare nu există alt răspuns decât mărturisirea cinstită a unei neputinţe totale : „regulile care ar permite să recunoaştem dacă aceste definiţii sunt predicative ar fi extrem de complicate şi nu pot fi recomandate din nici un motiv plauzibil. Este un inconvenient care ar putea fi remediat prin mai multă ingeniozitate sau recurgând la distincţii nesemnalate încă. Dar până acum, căutând aceste reguli, n-am putut găsi alt principiu director decât absenţa oricărei contradicţii".

Această teorie rămâne deci foarte obscură. În această noapte, o singură licărire — cuvântul zigzag. Ceea ce Russell numeşte „zigzag-giness" e fără îndoială acea trăsătură particulară care distinge argumentul lui Epimenide.

După *theory of limitation of size*, o clasă n-ar mai avea dreptul la existenţă dacă ar fi prea extinsă. Ar putea eventual să fie infinită, dar n-ar trebui să fie prea infinită.

Regăsim însă mereu aceeaşi dificultate ; când anume începe ea să fie *prea* infinită ? Bineînţeles, această dificultate nu este rezolvată, şi Russell trece la a treia teorie.

În *no class theory* este interzis să pronunţăm cuvântul *clasă* şi trebuie să-l înlocuim cu perifraze variate. Ce schimbare pentru logisticienii care nu vorbesc decât despre clase şi clase de clase ! Va trebui refăcută întreaga Logistică. Ne-am putea închipui cum ar arăta o pagină de Logistică după ce vom fi suprimat din ea toate propoziţiile în care este vorba despre clasă ? N-ar mai exista decât câţiva supravieţuitori răzleţi în mijlocul unei pagini albe. *Apparent rari nantes in gurgito vasto.*

Oricum, se observă care sunt ezitările lui Russell, modificările la care va supune principiile fundamentale adoptate de el până acum. Vor fi necesare criterii pentru a decide dacă o definiţie e prea complicată sau prea extinsă şi aceste criterii nu vor putea fi justificate decât printr-un apel la intuiţie.

În cele din urmă Russell înclină spre *no classes theory*.

Orice s-ar întâmpla, Logistica trebuie refăcută şi nu se prea ştie ce se va putea salva din ea. Inutil să adăugăm că nu sunt în discuţie decât Cantorismul şi Logistica. Adevăratele matematici, acelea care folosesc la ceva, vor putea continua să se dezvolte după propriile lor principii, fără să se preocupe de furtunile care fac ravagii în afara lor, şi ele îşi vor continua pas cu pas cuceririle obişnuite care sunt definitive şi pe care n-au a le părăsi niciodată.

7. Adevărata soluţie

Ce alegere să facem între aceste teorii diferite ? Mi se pare că soluţia este conţinută într-o scrisoare a lui Richard despre care am vorbit mai sus şi pe care o găsim în *Revue Générale des Sciences* din 30 iunie 1905. După ce va fi expus antinomia pe care am numit-o antinomia Richard, el îi dă explicaţia.

Să revenim la ceea ce spuneam despre această antinomie în paragraful V. M este mulţimea *tuturor* numerelor pe care le putem defini cu ajutorul unui număr finit de cuvinte, *fără a introduce însăşi noţiunea de mulţime M*. Altfel definiţia lui M ar conţine un cerc vicios. Nu se poate defini M prin însăşi mulţimea M.

Or, noi am definit N cu ajutorul unui număr finit de cuvinte, e adevărat, dar sprijinindu-ne pe noţiunea de mulţime M. De aceea N nu face parte din M.

În exemplul ales de Richard, concluzia se prezintă cu o evidenţă deplină şi evidenţa ar părea şi mai mare dacă ne-am referi la însuşi textul scrisorii sale. Dar aceeaşi explicaţie e valabilă şi pentru celelalte antinomii, aşa cum se poate uşor verifica.

Astfel *definiţiile care trebuie să fie privite ca non-predicative sunt cele care conţin un cerc vicios.* Exemplele precedente arată îndeajuns oare şi ceea ce Russell numeşte „zigzag-giness" ? Pun problema fără s-o rezolv.

8. Demonstraţiile principiului inducţiei

Să examinăm acum pretinsele demonstraţii ale principiului inducţiei şi în special pe cele ale lui Whitehead şi Burali-Forti.

Să vorbim mai întâi despre demonstraţia lui Whitehead şi să profităm de câteva denumiri noi introduse în mod fericit de Russell în recentul său memoriu.

Numim clasă *recurentă* orice clasă de numere care îl conţine pe zero şi care îl conţine pe $n + 1$ dacă îl conţine pe n.

Numim *număr inductiv* orice număr care face parte din toate clasele recurente.

Cu ce condiţie această ultimă definiţie care joacă un rol esenţial în demonstraţia lui Whitehead va fi „predicativă" şi deci acceptabilă ?

Potrivit consideraţiilor anterioare, prin *toate* clasele recurente trebuie să înţelegem toate acele clase în a căror definiţie nu intră noţiunea de număr inductiv.

Fără această condiţie, se reconstituie cercul vicios care a generat antinomiile.

Dar Whitehead nu şi-a luat această precauţiune.

Raţionamentul lui Whitehead este deci vicios ; e însuşi raţionamentul care a condus la antinomii ; el era nelegitim atunci când dădea rezultate false, şi rămâne nelegitim când conduce din întâmplare la un rezultat adevărat.

O definiţie care conţine un cerc vicios nu defineşte nimic. Suntem siguri că, oricare ar fi sensul pe care l-am da definiţiei noastre, nu serveşte la nimic să spunem că cel puţin zero aparţine clasei numerelor inductive ; nu e vorba de a şti dacă această clasă este vidă, ci dacă o putem delimita în mod riguros. O clasă „non-predicativă" nu este o clasă vidă, ci o clasă a cărei frontieră este indecisă.

Inutil să adaug că această obiecţie particulară lasă să subziste obiecţiile generale care se aplică tuturor demonstraţiilor.

9

Burali-Forti a dat o altă demonstraţie în articolul său *Le classi finite (Atti di Torino*, t. XXXII). Dar el este obligat să admită două postulate :

Primul afirmă că există totdeauna cel puţin o clasă infinită.

Al doilea se enunţă astfel:

$$u \in \mathrm{K}\,(\mathrm{K} - \iota\Lambda).\supset.u < \upsilon' u.$$

Primul postulat nu este mai evident decât principiul de demonstrat ; al doilea nu doar că nu este evident, dar este fals, aşa cum a arătat Whitehead — şi cum şi-ar fi dat seama imediat până şi cel mai slab elev din clasa specială de matematici care pregăteşte examenul pentru Politehnică — dacă axioma ar fi fost enunţată într-un limbaj inteligibil, pentru că are următoarea semnificaţie : numărul combinărilor pe care le putem forma cu mai multe obiecte este mai mic decât numărul acestor obiecte.

10. Axioma lui Zermelo

Într-o demonstraţie celebră, Zermelo se sprijină pe următoarea axiomă :

Într-o mulţime oarecare (sau chiar în fiecare din mulţimile unei mulţimi de mulţimi) putem totdeauna alege *la întâmplare* un element (chiar când acea mulţime de mulţimi ar conţine o infinitate de mulţimi). Această axiomă a fost aplicată de mii de ori fără a o enunţa, dar din momentul în care a fost enunţată, ea a suscitat îndoieli. Câţiva matematicieni, printre care Borel, au respins-o cu hotărâre. Alţii au admirat-o. Să vedem ce gândeşte despre ea Russell, în ultimul său articol.

El nu se pronunţă, dar consideraţiile pe care le face sunt foarte sugestive.

Mai întâi un exemplu pitoresc. Să presupunem că avem tot atâtea perechi de cizme câte numere întregi există, astfel încât să putem numerota *perechile* de la 1 la infinit. Câte perechi am avea ? Numărul cizmelor ar fi egal cu numărul perechilor ? Da, dacă în fiecare pereche, cizma dreaptă se deosebeşte de cizma stângă. Ar fi suficient să dăm numărul $2n$ — 1 cizmei drepte din a n-a pereche şi numărul $2n$ cizmei stângi din a n-a pereche. Nu, dacă cizma dreaptă este asemenea celei stângi, pentru că o atare operaţie ar deveni imposibilă. Afară doar dacă se admite axioma lui Zermelo, pentru că atunci am putea alege *la întâmplare* din fiecare pereche cizma pe care am considera-o ca dreaptă.

11. Concluzii

O demonstraţie bazată cu adevărat pe principiile Logicii analitice s-ar compune dintr-un şir de propoziţii. Unele, care ar servi drept premise, ar fi identităţi sau definiţii ; celelalte s-ar deduce din primele, pas cu pas. Dar, deşi legătura între fiecare propoziţie şi următoarea se percepe imediat, n-am vedea dintr-odată cum s-a putut trece de la prima la ultima, pe care am putea fi tentaţi s-o considerăm un adevăr nou. Dar dacă se înlocuiesc succesiv diversele expresii care figurează aici prin definiţia lor şi dacă se continuă cât se poate de mult această operaţie, n-ar mai rămâne la sfârşit decât identităţi, încât totul s-ar reduce la o imensă tautologie. Logica rămâne deci sterilă, doar dacă nu e fecundată de intuiţie.

E ceea ce am scris altădată. Logisticienii susţin contrariul şi cred a o fi dovedit demonstrând efectiv adevăruri noi. Prin ce mecanism ?

De ce, aplicând la raţionamentele lor procedeul pe care l-am descris, adică înlocuind termenii definiţi prin definiţiile lor, nu le vedem a se dizolva în identităţi ca raţionamentele obişnuite ? Pentru că acest procedeu nu li se poate aplica. De ce ? Întrucât definiţiile lor sunt non-predicative şi prezintă acel gen de cerc vicios pe care l-am semnalat mai sus. Definiţiile non-predicative nu pot fi substituite termenului definit. În aceste condiţii, Logistica nu mai este sterilă, ea generează antinomia.

Tocmai credinţa în existenţa infinitului actual a dat naştere acestor definiţii non-predicative. Să mă explic : în aceste definiţii figurează cuvântul *toţi*, aşa cum se vede în exemplele citate mai sus. Cuvântul *toţi* are un sens foarte precis atunci când e vorba de un număr finit de obiecte. Ca să mai existe încă unul, în condiţiile în care obiectele sunt în număr infinit, ar trebui să existe un infinit actual. Altminteri *toate* aceste obiecte n-ar putea fi concepute ca stabilite anterior definiţiei lor şi atunci, dacă definiţia unei noţiuni N depinde de *toate* obiectele A, ea poate fi atinsă de cerc vicios dacă printre obiectele A există unele care nu pot fi definite fără a recurge la însăşi noţiunea N.

Regulile logicii formale exprimă pur şi simplu proprietăţile tuturor clasificărilor posibile. Dar pentru ca ele să fie aplicabile, trebuie ca aceste clasificări să fie imuabile şi să nu trebuiască să le modificăm în cursul raţionamentului. Dacă nu avem de verificat decât un număr finit de obiecte, e uşor să menţinem neschimbate aceste clasificări. Dacă obiectele sunt în număr *indefinit*, adică dacă eşti necontenit expus situaţiei de a vedea apărând obiecte noi şi neprevăzute, se poate întâmpla ca apariţia unui obiect nou să impună modificarea clasificării, şi te expui astfel antinomiilor.

Nu există infinit actual. Cantorienii au uitat acest lucru şi au ajuns la contradicţii. Ce-i drept, Cantorismul a adus servicii, dar pe vremea când era aplicat la o adevărată problemă, ai cărei termeni erau clar definiţi, şi atunci se putea merge fără teamă.

Asemenea cantorienilor, şi logisticienii au uitat acest lucru şi au întâlnit aceleaşi dificultăţi. E important însă de ştiut dacă s-au angajat pe această cale în mod accidental sau era pentru ei o necesitate.

Pentru mine, chestiunea nu este nesigură. Credinţa în infinitul actual este esenţială în logistica russelliană. E tocmai ceea ce o deosebeşte de logistica hilbertiană. Hilbert se situează pe punctul de vedere al extensiunii, anume pentru a evita antinomiile cantoriene. Russell se situează pe punctul de vedere al comprehensiunii. În consecinţă, genul e pentru el anterior speciei şi *summum genus* precede orice. Aceasta n-ar constitui nici un inconvenient dacă *summum genus* ar fi finit ; dacă este însă infinit, trebuie să pui infinitul înaintea finitului, adică să priveşti infinitul ca actual.

Şi nu avem doar clase infinite. Atunci când trecem de la gen la specie restrângând conceptul prin condiţii noi, numărul acestor condiţii este tot infinit, deoarece ele exprimă în general faptul că obiectul considerat prezintă o relaţie sau alta cu toate obiectele unei clase infinite.

Dar asta ţine de o poveste veche. Russell a observat pericolul şi va acţiona. Va schimba totul. Să ne înţelegem bine; el nu se pregăteşte doar să introducă principii noi care-i vor permite operaţii altădată interzise ; se pregăteşte să interzică operaţii pe care altădată le considera legitime. El nu se mulţumeşte să adore ceea ce a ars ; va arde ceea ce e adevărat, şi lucrul acesta este mai grav. El nu adaugă la construcţie o aripă nouă, ci îi subminează fundaţiile.

Vechea Logistică a murit ; *zigzag-theory* şi *no classes theory* îşi dispută deja succesiunea ei. Pentru a o judeca pe cea nouă, vom aştepta ca ea să existe.

CARTEA A TREIA

Mecanica nouă

CAPITOLUL I
Mecanica şi radiul

1. Introducere

Principiile generale ale dinamicii care, începând cu Newton, au servit drept fundament ştiinţei fizice şi care păreau de neclintit sunt oare pe punctul de a fi abandonate sau cel puţin profund modificate ? E ceea ce mulţi oameni se întreabă de câţiva ani. Descoperirea radiului, consideră ei, ar fi răsturnat dogmele ştiinţifice despre care se credea că sunt cele mai solide : pe de o parte, imposibilitatea transmutaţiei metalelor ; pe de altă parte, postulatele fundamentale ale mecanicii. Poate s-au grăbit să considere aceste noutăţi ca definitiv stabilite şi să distrugă idolii noştri de ieri. Înainte de a lua o decizie, poate s-ar cuveni să aşteptăm experienţe mai numeroase şi mai probante. Nu e mai puţin necesar să cunoaştem de pe acum teoriile noi şi argumentele, deja foarte serioase, pe care se sprijină ele.

A. Mişcarea unui punct material izolat şi sustras oricărei forţe exterioare este rectilinie şi uniformă. Acesta este principiul inerţiei: nu există acceleraţie fără forţă.

B. Acceleraţia unui punct mobil are aceeaşi direcţie ca rezultanta tuturor forţelor care se exercită asupra lui ; ea este egală cu raportul dintre această rezultantă şi un coeficient numit *masă* a punctului mobil.

Masa unui punct mobil, astfel definită, este o constantă ; ea nu depinde de viteza dobândită de acel punct ; ea e aceeaşi dacă forţa, fiind paralelă cu viteza, tinde doar să accelereze sau să încetinească mişcarea punctului, sau dacă, dimpotrivă, fiind perpendiculară pe viteză, tinde să devieze acea mişcare spre dreapta ori spre stânga, adică să *curbeze* traiectoria.

C. Toate forţele care se exercită asupra unui punct material provin din acţiunea altor puncte materiale ; ele nu depind decât de poziţiile şi vitezele *relative* ale acestor diferite puncte materiale.

Combinând cele două principii B şi C, se ajunge la *principiul mişcării relative,* în virtutea căruia legile mişcării unui sistem sunt aceleaşi fie că raportăm sistemul la axe fixe, fie că-l raportăm la axe mobile antrenate într-o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă, încât este imposibil să distingem mişcarea absolută de o mişcare relativă în raport cu asemenea axe mobile.

D. Dacă un punct material A acţionează asupra unui alt punct material B, corpul B reacţionează asupra lui A, şi aceste două acţiuni sunt două forţe egale şi direct opuse. Acesta este *principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii*, sau, mai scurt, *principiul reacţiunii.*

Observaţiile astronomice, fenomenele fizice cele mai obişnuite par a fi adus acestor principii o confirmare completă, constantă şi foarte precisă. E adevărat, se spune acum, dar numai pentru că s-a operat totdeauna doar cu viteze slabe. Mercur, de exemplu, care este planeta cea mai rapidă, nu se deplasează decât cu 100 kilometri pe secundă. S-ar comporta oare la fel acest astru dacă s-ar deplasa de o mie de ori mai repede ? Se vede că nu e cazul să ne îngrijorăm ; oricare ar putea fi progresele automobilismului, o să mai treacă multă vreme până ce va trebui să renunţăm să mai aplicăm maşinilor noastre principiile clasice ale dinamicii.

Cum s-a ajuns aşadar la realizarea unor viteze de o mie de ori mai mari decât cea a lui Mercur, egale, de exemplu, cu a zecea sau a treia parte din viteza luminii, sau şi mai apropiate de această viteză ? Cu ajutorul radiaţiilor catodice şi ale radiaţiilor radiului.

Se ştie că radiul emite trei feluri de radiaţii, desemnate prin cele trei litere greceşti α, β, γ. În cele ce urmează, dacă nu se menţionează expres contrariul, va fi vorba totdeauna de radiaţiile β, care sunt asemănătoare cu radiaţiile catodice.

După descoperirea radiaţiilor catodice asistăm la confruntarea a două teorii : Crookes atribuia fenomenele unui adevărat bombardament molecular, iar Hertz — unor ondulaţii speciale ale eterului. Se reînnoia astfel dezbaterea care îi divizase pe fizicieni cu

un secol în urmă în legătură cu lumina. Crookes relua teoria emisiei, abandonată în cazul luminii ; Hertz pleda pentru teoria ondulatorie. Faptele par a-i da dreptate lui Crookes.

S-a recunoscut, în primul rând, că radiaţiile catodice transportă cu ele o sarcină electrică negativă ; ele sunt deviate de un câmp magnetic şi de un câmp electric. Aceste deviaţii sunt echivalente cu cele pe care le-ar produce aceleaşi câmpuri asupra unor proiectile care se deplasează cu o viteză foarte mare şi sunt puternic încărcate cu electricitate. Aceste două deviaţii depind de două cantităţi : viteza, pe de-o parte, şi raportul între sarcina electrică a proiectilului şi masa lui, de cealaltă parte. Nu se poate cunoaşte valoarea absolută a acestei mase, nici cea a sarcinii, ci numai raportul lor. E clar, într-adevăr, că, dacă se dublează în acelaşi timp sarcina şi masa, fără a schimba viteza, se va dubla forţa care tinde să devieze proiectilul : dar, întrucât şi masa lui e dublată, acceleraţia şi deviaţia observabile nu vor fi schimbate. Observarea celor două deviaţii ne va oferi deci două ecuaţii pentru a determina cele două necunoscute. Se obţine o viteză de 10 000 la 30 000 kilometri pe secundă. Cât priveşte raportul dintre sarcină şi masă, el este foarte mare. Îl putem compara cu raportul corespondent referitor la ionul hidrogen din electroliză. Se obţine atunci rezultatul că un proiectil catodic transportă aproximativ de o mie de ori mai multă electricitate decât ar transporta o masă egală de hidrogen într-un electrolit.

Pentru a confirma aceste opinii, ar fi necesară o măsurare directă a acelei viteze pe care s-o comparăm cu viteza astfel calculată. Experienţe vechi ale lui J.-J. Thomson dăduseră rezultate de o sută de ori mai slabe ; dar ele erau supuse unor cauze de eroare. Problema a fost reluată de Wiechert într-un dispozitiv în care se utilizează oscilaţiile hertziene. S-au obţinut rezultate care concordă cu teoria, cel puţin ca ordin de mărime. Ar fi foarte important să se reia aceste experienţe. Oricum, teoria ondulaţiilor pare a nu putea da seama de acest ansamblu de fapte.

Aceleaşi calcule, făcute pentru radiaţiile β ale radiului, au dat viteze şi mai mari : 100 000, 200 000 de kilometri sau şi mai mult. Aceste viteze depăşesc cu mult toate vitezele pe care le cunoaştem. Ce-i drept, se ştie demult, lumina se deplasează cu 300 000 de

kilometri pe secundă. Dar ea nu constituie un transport de materie, în vreme ce, dacă se adoptă teoria emisiei pentru radiaţiile catodice, ar exista molecule de materie care se mişcă realmente cu acele viteze, şi se cuvine să cercetăm dacă le mai pot fi aplicate legile obişnuite ale mecanicii.

2. Masă longitudinală şi masă transversală

După cum se ştie, curenţii electrici dau naştere fenomenelor de inducţie, în particular *selfinducţiei*. Atunci când curentul creşte, se dezvoltă o forţă electromotoare de selfinducţie care tinde să se opună curentului. Dimpotrivă, atunci când curentul descreşte, forţa electromotoare de selfinducţie tinde să menţină curentul. Selfinducţia se opune deci oricărei variaţii a intensităţii curentului, la fel cum, în mecanică, inerţia unui corp se opune oricărei variaţii a vitezei sale. *Selfinducţia este o adevărată inerţie*. Totul se petrece ca şi cum curentul nu s-ar putea naşte fără a pune în mişcare eterul înconjurător şi ca şi cum inerţia acestui eter ar tinde, în consecinţă, să menţină constantă intensitatea curentului. Ar trebui învinsă această inerţie pentru a crea curentul, ar trebui iarăşi învinsă pentru a-l face să înceteze.

O radiaţie catodică — o ploaie de proiectile încărcată cu electricitate negativă — poate fi asimilată unui curent. Fără îndoială, acest curent diferă, cel puţin pentru început, de curenţii de conducţie obişnuită, în care materia este imobilă şi electricitatea circulă prin materie. E un *curent de convecţie*, în care electricitatea, ataşată de un vehicul material, e transportată prin mişcarea acelui vehicul. Dar Rowland a demonstrat că aceşti curenţi de convecţie produc aceleaşi efecte magnetice ca şi curenţii de conducţie ; ei trebuie să producă şi aceleaşi efecte de inducţie. Mai întâi, dacă altfel ar sta lucrurile, principiul conservării energiei ar fi violat ; pe de altă parte, Crémien şi Pender au întrebuinţat o metodă prin care se puneau *direct* în evidenţă aceste efecte de inducţie.

Dacă viteza unui corpuscul catodic variază, ar varia şi intensitatea curentului corespunzător şi s-ar dezvolta efecte de selfinducţie care ar tinde să se opună acestei variaţii. Aşadar, corpusculii

trebuie să aibă o dublă inerţie : mai întâi propria lor inerţie, la care se adaugă inerţia aparentă, datorată selfinducţiei care produce aceleaşi efecte. Corpusculii ar avea deci o masă totală aparentă, compusă din masa lor reală şi dintr-o masă fictivă de origine electromagnetică. Calculul arată că această masă fictivă variază cu viteza şi că forţa de inerţie a selfinducţiei nu este aceeaşi când viteza proiectilului este accelerată sau încetinită, sau când este deviată. Acelaşi lucru se întâmplă deci şi cu forţa de inerţie aparentă totală.

Masa totală aparentă nu este deci aceeaşi când forţa reală aplicată corpusculului este paralelă cu viteza sa şi tinde să accelereze mişcarea sau când e perpendiculară pe acea viteză şi tinde să-i modifice direcţia. În consecinţă, trebuie să distingem *masa totală longitudinală* şi *masa totală transversală*. Aceste două mase totale depind, de altfel, de viteză. E ceea ce rezultă din lucrările teoretice ale lui Abraham.

În cazul măsurătorilor de care vorbeam în capitolul precedent, ce anume se determină măsurând cele două variaţii ? Viteza, pe de o parte, şi, pe de altă parte, raportul dintre sarcină şi *masa transversală totală*. Cum să distingem, în aceste condiţii, în cadrul masei totale, partea ce revine masei reale şi cea care revine masei fictive electromagnetice ? Nici n-ar trebui să ne gândim la aşa ceva dacă n-am avea decât radiaţiile catodice propriu-zise. Din fericire, însă, dispunem de radiaţiile radiului, care, cum am văzut, sunt sensibil mai rapide. Aceşte radiaţii nu sunt toate identice şi nu se comportă la fel sub acţiunea unui câmp electric şi magnetic. Se stabileşte că deviaţia electrică este funcţie de deviaţia magnetică şi, proiectând pe o placă sensibilă radiaţii ale radiului care au suferit acţiunea celor două câmpuri, se poate fotografia curba care reprezintă relaţia între aceste două deviaţii. E ceea ce a făcut Kaufmann, care a dedus de aici relaţia între viteză şi raportul dintre sarcină şi masa aparentă totală, raport pe care îl vom numi ε.

S-ar putea presupune că există mai multe feluri de radiaţii, caracterizate fiecare printr-o viteză determinată, o sarcină şi o masă determinate. Dar această ipoteză este puţin verosimilă. Într-adevăr, de ce toţi corpusculii ar avea mereu aceeaşi viteză ? E mai natural să presupunem că sarcina ca şi masa *reală* sunt aceleaşi pentru toate proiectilele, şi că acestea nu diferă decât prin viteza lor. Dacă

raportul ε este funcţie de viteză, aceasta nu se datorează faptului că masa reală variază funcţie de viteză, ci, întrucât masa fictivă electromagnetică depinde de viteză, masa totală aparentă, singura observabilă, trebuie să depindă de ea, deşi masa reală nu depinde şi e constantă.

Calculele lui Abraham ne permit să cunoaştem legea după care masa *fictivă* variază în funcţie de viteză ; experienţa lui Kaufmann ne permite să cunoaştem legea de variaţie a masei *totale*. Compararea celor două legi ne-ar îngădui deci să determinăm raportul dintre masa *reală* şi masa *totală*.

Aceasta este metoda de care s-a folosit Kaufmann pentru a determina raportul amintit. Rezultatul este foarte surprinzător : *masa reală este nulă*.

S-a ajuns astfel la concepţii cu totul neaşteptate. S-a extins asupra tuturor corpurilor ceea ce nu se demonstrează decât pentru corpusculii catodici. Ceea ce numim masă ar fi doar o aparenţă ; orice inerţie ar fi de origine electromagnetică. Dar atunci masa n-ar mai fi constantă, ea ar creşte odată cu viteza ; sensibil constantă pentru viteze ce pot merge până la 1 000 de kilometri pe secundă, ea ar creşte apoi şi ar deveni infinită pentru viteza luminii. Masa transversală n-ar mai fi egală cu masa longitudinală ; ele ar fi doar aproape egale dacă viteza nu e prea mare. Principiul B al mecanicii n-ar mai fi adevărat.

3. Radiaţiile canal

În punctul unde ne aflăm, această concluzie poate părea prematură. Se poate oare aplica la întreaga materie ceea ce nu a fost stabilit decât pentru aceşti corpusculi atât de uşori care sunt doar o emanaţie a materiei şi poate nu a adevăratei materii ? Dar, înainte de a aborda această problemă, e necesar să spunem un cuvânt despre un alt fel de radiaţii. Vreau să vorbesc despre *radiaţiile canal, Kanalstrahlen* ale lui Goldstein. Odată cu radiaţiile catodice încărcate cu electricitate negativă, catodul emite radiaţii canal încărcate cu electricitate pozitivă. În general, aceste radiaţii nefiind respinse de catod, rămân izolate în vecinătatea imediată a catodu-

lui, unde constituie „stratul galben deschis", care nu e foarte uşor de observat. Dacă însă catodul comportă găuri şi dacă obturează aproape complet tubul, radiaţiile canal s-ar propaga *în spatele* catodului, în sensul opus celui al radiaţiilor catodice, şi ar putea fi studiate. S-a putut pune astfel în evidenţă sarcina lor pozitivă şi arăta că deviaţiile magnetice şi electrice persistă, ca şi în cazul radiaţiilor catodice, dar sunt mult mai slabe.

Radiul emite şi el radiaţii asemănătoare cu radiaţiile canal, şi relativ foarte absorbabile, care se numesc radiaţii α.

Ca şi în cazul radiaţiilor catodice, cele două deviaţii pot fi măsurate şi de aici pot fi deduse viteza şi raportul ε. Rezultatele sunt mai puţin constante decât pentru radiaţiile catodice, dar viteza şi raportul ε sunt mai mici. Corpusculii pozitivi sunt mai puţin încărcaţi decât corpusculii negativi ; sau, ceea ce este mai firesc, dacă se presupune că sarcinile sunt egale şi de sens contrar, corpusculii pozitivi sunt mult mai mari. Aceşti corpusculi, încărcaţi unii pozitiv şi alţii negativ, au primit numele de *electroni*.

4. Teoria lui Lorentz

Dar electronii nici măcar nu-şi manifestă existenţa în aceste radiaţii în care ne apar a se deplasa cu viteze enorme. Îi vom vedea în roluri foarte diferite. Ei ne vor explica principalele fenomene din optică şi electricitate. Sinteza strălucită despre care vom spune un cuvânt se datorează lui Lorentz.

Întreaga materie este formată din electroni care poartă sarcini uriaşe. Ea ne pare totuşi neutră pentru că sarcinile de semn contrar ale acestor electroni se compensează. Ne putem reprezenta, de exemplu, un fel de sistem solar format dintr-un mare electron pozitiv, în jurul căruia ar gravita numeroase planete mici care ar fi electroni negativi, atraşi de electricitatea de semn contrar cu care este încărcat electronul central. Sarcinile negative ale planetelor ar compensa sarcina pozitivă a soarelui, astfel încât suma algebrică a tuturor acestor sarcini ar fi nulă.

Toţi aceşti electroni s-ar scălda în eter. Eterul ar fi pretutindeni identic sieşi şi perturbaţiile s-ar propaga în el după aceleaşi legi ca lumina sau oscilaţiile hertziene *în vid*. În afară de electroni şi eter, n-ar exista nimic. Atunci când o undă luminoasă pătrunde într-o zonă a eterului, unde electronii ar fi numeroşi, aceşti electroni se pun în mişcare sub influenţa perturbaţiei eterului, asupra căruia ar reacţiona apoi. Aşa s-ar explica refracţia, dispersia, dubla refracţie şi absorbţia. La fel, dacă un electron ar începe să se mişte dintr-o cauză oarecare, ar tulbura eterul din jurul lui şi ar da naştere unor unde luminoase, ceea ce ar explica emisia luminii de către corpurile incandescente.

În anumite corpuri — în metale, de exemplu — ar exista electroni imobili, între care ar circula electroni mobili ce s-ar bucura de o libertate completă, în afara aceleia de a ieşi din corpul metalic şi de a trece dincolo de suprafaţa ce-l separă de vidul exterior sau de orice alt corp nemetalic. Aceşti electroni mobili se comportă atunci, în interiorul corpului metalic, aşa cum o fac, potrivit teoriei cinetice a gazelor, moleculele unui gaz în interiorul vasului în care este închis gazul. Dar, sub influenţa unei diferenţe de potenţial, electronii mobili negativi ar tinde să se deplaseze toţi într-o parte, iar electronii mobili pozitivi în cealaltă parte. E ceea ce ar produce curenţii electrici şi *tocmai din această cauză corpurile respective ar fi conductoare*. Pe de altă parte, vitezele electronilor ar fi cu atât mai mari cu cât temperatura ar fi mai ridicată, dacă acceptăm asimilarea cu teoria cinetică a gazelor. Atunci când un electron mobil ar întâlni suprafaţa corpului metalic — suprafaţă de care nu poate trece —, el ar ricoşa asemenea unei bile de biliard care a atins banda, şi viteza sa ar suferi o bruscă schimbare de direcţie. Dar atunci când un electron îşi schimbă direcţia, cum o să vedem mai departe, el devine sursa unei unde luminoase, şi de aceea metalele calde sunt incandescente.

În alte corpuri — dielectricele şi corpurile transparente —, electronii mobili se bucură de o libertate mult mai mică. Ei rămân ca şi atacaţi de electronii mobili care îi atrag. Cu cât se îndepărtează de aceştia, cu atât atracţia creşte şi tinde să-i readucă îndărăt. Ei nu pot suferi deci decât abateri mici ; nu mai pot să circule, ci doar să oscileze în jurul poziţiei lor medii. De aceea aceste corpuri n-ar

mai fi conductoare ; ar fi, de altfel, cel mai adesea transparente şi, de asemenea, refringente, pentru că vibraţiile luminoase s-ar comunica electronilor mobili, susceptibili de oscilaţie, de unde ar rezulta o perturbaţie.

Nu pot oferi aici detaliul calculelor ; m-aş limita să spun că această temă dă seama de toate faptele cunoscute şi că a făcut posibilă predicţia unora noi, cum ar fi fenomenul Zeeman.

5. Consecinţe mecanice

Putem acum considera două ipoteze :

1. Electronii pozitivi au o masă reală, mult mai mare decât masa lor fictivă electromagnetică ; numai electronii negativi sunt lipsiţi de masă reală. S-ar putea chiar presupune că, în afara electronilor pozitivi şi negativi, există atomi neutri care nu mai au altă masă decât masa lor reală. În acest caz, mecanica nu este afectată ; nu avem nevoie să ne atingem de legile ei ; masa reală este constantă ; dar mişcările sunt tulburate de efectele de selfinducţie, ceea ce s-a ştiut mereu ; pe de altă parte, aceste perturbaţii sunt aproape neglijabile, mai puţin pentru electronii negativi, care, neavând masă reală, nu ţin de adevărata materie.

2. Dar există şi un alt punct de vedere. Se poate presupune că nu există atom neutru şi că electronii pozitivi sunt lipsiţi de masă reală, la fel ca şi electronii negativi. Dar atunci, întrucât masa reală dispare, ori cuvântul *masă* n-ar mai avea nici un sens, ori ar trebui ca el să desemneze masa fictivă electromagnetică ; în acest caz, masa n-ar mai fi constantă, masa transversală n-ar mai fi egală cu masa longitudinală, principiile mecanicii ar fi răsturnate.

Mai întâi o scurtă explicaţie. Am spus că, pentru aceeaşi sarcină, masa *totală* a unui electron pozitiv este mult mai mare decât cea a unui electron negativ. Şi atunci e firesc să considerăm că această diferenţă se explică, pentru că electronul pozitiv are, în afară de masa lui fictivă, o masă reală considerabilă — ceea ce ne-ar readuce la prima ipoteză. Se poate însă admite deopotrivă că masa reală este nulă şi pentru ceilalţi, dar că masa fictivă a electronului pozitiv este mult mai mare, pentru că acest electron este

mult mai mic. Zic bine : mult mai mic. Şi, într-adevăr, în această ipoteză, inerţia este de origine exclusiv electromagnetică ; ea se reduce la inerţia eterului ; electronii nu mai sunt nimic prin ei înşişi ; ei sunt doar găuri în eter şi în jurul cărora se agită eterul ; cu cât ar fi mai mici aceste găuri, cu atât ar exista mai mult eter şi, în consecinţă, cu atât mai mare ar fi inerţia eterului.

Cum să hotărâm între aceste două ipoteze ? Operând asupra radiaţiilor canal, aşa cum Kaufmann a operat asupra radiaţiilor β ? E imposibil. Viteza acestor radiaţii e mult prea slabă. Fiecare ar trebui aşadar să se decidă după temperamentul său, conservatorii trăgând într-o parte şi amatorii de nou în alta ? Poate, dar pentru a face să se înţeleagă argumentele novatorilor, trebuie să recurgem la alte consideraţii.

CAPITOLUL II

Mecanica şi optica

1. Aberaţia

Se ştie în ce constă fenomenul aberaţiei, descoperit de Bradley. Lumina emisă de o stea cere un anumit timp pentru a parcurge o lunetă. În acest timp luneta, antrenată de mişcarea Pământului, s-a deplasat. Dacă deci s-ar orienta luneta în direcţia *adevărată* a stelei, imaginea s-ar forma în punctul pe care l-ar ocupa intersecţia firelor reticulului. Am fi obligaţi deci să reorientăm luneta pentru a readuce imaginea pe intersecţia firelor. Rezultă de aici că astronomul nu ar orienta luneta în direcţia vitezei absolute a luminii, adică pe poziţia adevărată a stelei, ci în direcţia vitezei relative a luminii în raport cu Pământul, adică pe ceea ce se cheamă poziţia aparentă a stelei.

Viteza luminii este cunoscută ; s-ar putea deci crede că dispunem de mijlocul de a calcula viteza *absolută* a Pământului. (Mă voi explica îndată asupra cuvântului *absolut*). Dar nu e deloc aşa. Noi cunoaştem poziţia aparentă a stelei pe care o observăm, nu şi poziţia sa adevărată : nu cunoaştem viteza luminii decât în mărime şi nu în direcţie.

Aşadar, dacă viteza absolută a Pământului ar fi rectilinie şi uniformă, n-am fi bănuit niciodată fenomenul aberaţiei. Dar ea e variabilă ; se compune din două părţi : viteza sistemului solar — care este rectilinie şi uniformă — şi viteza Pământului în raport cu Soarele, care este variabilă. Dacă ar exista numai viteza sistemului solar, adică partea constantă, direcţia observată ar fi invariabilă. Această poziţie pe care am observa-o astfel se numeşte poziţia aparentă *medie* a stelei.

Dacă acum ţinem seama simultan de cele două părţi ale vitezei Pământului, am obţine poziţia aparentă actuală, care descrie o mică elipsă în jurul poziţiei aparente medii, şi tocmai acea elipsă se observă.

Neglijând cantităţile foarte mici, am vedea că dimensiunile acestei elipse nu depind decât de raportul dintre viteza Pământului faţă de Soare şi viteza luminii, astfel că nu intervine decât viteza *relativă* a Pământului faţă de Soare.

Să ne oprim totuşi aici. Acest rezultat nu este riguros, ci doar aproximativ. Să ducem aproximaţia puţin mai departe. Dimensiunile elipsei ar depinde atunci de viteza absolută a Pământului. Să comparăm axele mari ale elipsei pentru diferitele stele : am avea, cel puţin teoretic, mijlocul de a determina această viteză absolută.

Acest lucru ar fi poate mai puţin şocant decât pare la început ; nu este vorba, efectiv, de viteză în raport cu un vid absolut, ci de viteză în raport cu eterul, care este considerat *prin definiţie* a se afla în repaus absolut.

De altminteri, acest mijloc este pur teoretic. Aberaţia este într-adevăr foarte mică. Variaţiile posibile ale elipsei aberaţiei sunt şi mai mici, şi, dacă socotim aberaţia ca fiind de ordinul întâi, ele trebuie deci socotite a fi de ordinul doi : aproximativ o miime de secundă ; ele sunt absolut inaccesibile instrumentelor noastre. O să vedem mai departe de ce teoria precedentă trebuie să fie respinsă, şi de ce nu am putea determina această viteză absolută chiar dacă instrumentele noastre ar fi de o mie de ori mai precise !

Ne-am putea gândi la un alt mijloc, ceea ce s-a şi făcut de fapt. Viteza luminii nu este aceeaşi în apă şi în aer. N-am putea compara cele două poziţii aparente ale unei stele pe care o vedem printr-o lunetă plină când de aer, când de apă ? Rezultatele au fost negative ; legile aparente ale reflexiei şi refracţiei nu au fost verificate de mişcarea Pământului. Acest fenomen are două explicaţii :

1. S-ar putea presupune că eterul nu se află în repaus, ci este antrenat de corpurile în mişcare. Nu ar trebui să ne surprindă atunci că fenomenele de refracţie n-au fost modificate de mişcarea Pământului, pentru că totul — prisme, lunete şi eter — este antrenat simultan într-o aceeaşi translaţie. În ce priveşte aberaţia însăşi, ea s-ar explica printr-un fel de refracţie care s-ar produce la suprafaţa de separaţie a eterului din spaţiile interstelar aflat în repaus şi a eterului antrenat de mişcarea Pământului. Pe această ipoteză s-a întemeiat *teoria lui Hertz* referitoare la electrodinamica corpurilor în mişcare ;

2. Fresnel, dimpotrivă, presupune că eterul se află în repaus absolut în vid, în repaus aproape absolut în aer, oricare ar fi viteza aerului, şi că este parţial antrenat de mediile refringente. Lorentz a dat acestei teorii o formă mai satisfăcătoare. După el, eterul se află în repaus, numai electronii se mişcă ; în vid, unde numai eterul este în joc, în aer, unde este aproape singur în joc, antrenarea este nulă sau aproape nulă ; în mediile refringente, unde perturbaţia este produsă simultan de vibraţiile eterului şi de cele ale electronilor puşi în mişcare de agitaţia eterului, ondulaţiile sunt *parţial* antrenate.

Pentru a decide între cele două ipoteze, recurgem la experienţa lui Fizeau, în care s-a comparat, prin măsurări ale franjelor de interferenţă, viteza luminii în aerul şi respectiv în apa aflate în repaus sau în mişcare. Aceste experienţe au confirmat ipoteza lui Fresnel a antrenării parţiale. Ele au fost reluate cu acelaşi rezultat de Michelson. *Teoria lui Hertz trebuie deci să fie respinsă.*

2. Principiul relativităţii

Dar dacă eterul nu este antrenat de mişcarea Pământului, se poate oare pune în evidenţă, prin intermediul fenomenelor optice, viteza absolută a Pământului, sau mai curând viteza lui în raport cu eterul imobil ? Experienţa a răspuns negativ, în pofida faptului că procedeele experimentelor au fost variate în toate modurile posibile. Indiferent de mijlocul întrebuinţat, nu se vor putea dezvălui niciodată decât viteze relative, adică vitezele unor corpuri materiale în raport cu alte corpuri materiale. Într-adevăr, dacă sursa de lumină şi aparatele de observaţie se află pe Pământ şi participă la mişcarea acestuia, rezultatele experimentale au fost totdeauna aceleaşi, indiferent de orientarea aparatului în raport cu direcţia mişcării orbitale a Pământului. Dacă aberaţia astronomică se produce, înseamnă că sursa, care este o stea, se mişcă în raport cu observatorul.

Ipotezele formulate până acum dau perfect seama de acest rezultat general, *dacă se neglijează cantităţile foarte mici de ordinul pătratului aberaţiei.* Explicaţia se sprijină pe noţiunea de *timp local*,

pe care voi încerca s-o fac înţeleasă, şi care a fost introdusă de Lorentz. Să presupunem doi observatori, situaţi unul în A şi celălalt în B, care vor să-şi regleze ceasurile prin intermediul unor semnale optice. Ei convin că B va trimite un semnal lui A atunci când ceasul său va indica o oră determinată, şi A îşi va potrivi ceasul în momentul în care observă semnalul. Dacă s-ar opera doar în acest fel, ar exista o eroare sistematică, întrucât lumina are nevoie de un timp t pentru a ajunge de la B la A şi deci ceasul lui A ar fi în întârziere cu un timp t în raport cu ceasul lui B. Această eroare e uşor de corectat. E de-ajuns să încrucişăm semnalele. Trebuie ca A să trimită la rândul lui semnale lui B şi, după acest nou reglaj, ceasul lui B va fi în întârziere cu un timp t în raport cu ceasul lui A. Ar fi suficient atunci să considerăm media aritmetică între cele două reglări.

Dar acest mod de a opera presupune că lumina are nevoie de acelaşi timp pentru a se deplasa din A în B şi pentru a reveni din B în A. Acest lucru este adevărat dacă observatorii sunt imobili şi nu mai este adevărat dacă ei sunt antrenaţi într-o translaţie comună, pentru că atunci A, de exemplu, ar merge în întâmpinarea luminii care vine de la B, în timp ce B s-ar deplasa în faţa luminii care vine de la A. Aşadar, dacă observatorii sunt antrenaţi într-o translaţie comună şi dacă nu se îndoiesc de acest lucru, reglajul lor ar fi defectuos. Ceasurile lor n-ar indica acelaşi timp; fiecare dintre ele ar indica *timpul local*, adecvat punctului în care se află.

Cei doi observatori n-ar avea nici un mijloc să-şi dea seama de acest lucru, dacă eterul mobil nu le poate transmite decât semnale luminoase, deplasându-se toate cu aceeaşi viteză, şi dacă celelalte semnale pe care şi le-ar putea trimite ele sunt transmise prin medii antrenate împreună cu ei în translaţia lor. Fenomenul pe care fiecare dintre ei l-ar observa ar fi ori în avans, ori în întârziere ; el nu s-ar produce în acelaşi moment decât dacă translaţia n-ar exista. Cum însă l-am observa cu un ceas prost reglat, nu ne-am da seama de acest lucru şi aparenţele nu ar fi modificate.

Rezultă de aici că e uşor să explicăm compensaţia câtă vreme se neglijează pătratul aberaţiei, şi multă vreme experienţele au fost prea puţin precise pentru a ne putea da seama. Într-o zi însă, Michelson a imaginat un procedeu mult mai fin : el a făcut să in-

terfereze radiaţii care parcurseseră traiectorii diferite după ce se vor fi reflectat pe oglinzi ; în condiţiile în care fiecare din traiectorii se apropie de un metru şi franjele de interferenţă permit a aprecia diferenţe de o fracţiune de o miime de milimetru, nu se mai putea neglija pătratul aberaţiei, şi *totuşi rezultatele au fost tot negative.* Teoria cerea deci să fie completată, ceea ce s-a şi realizat prin *ipoteza lui Lorentz şi Fitzgerald.*

Aceşti doi fizicieni presupun că toate corpurile antrenate într-o translaţie suferă o contracţie în sensul acestei translaţii, în timp ce dimensiunile lor perpendiculare pe această translaţie rămân invariabile. *Această contracţie este aceeaşi pentru toate corpurile.* De altfel, ea este foarte slabă, în jur de a doua sută de milionime pentru o viteză ca cea a Pământului. De altminteri, instrumentele noastre de măsură n-ar putea s-o deceleze, chiar dacă ar fi mult mai precise ; metrii cu care măsurăm suferă de fapt aceeaşi contracţie ca obiectele de măsurat. Dacă un corp se aplică exact pe metru atunci când orientăm corpul şi, în consecinţă, metrul în sensul mişcării Pământului, el va continua să se aplice exact într-o altă orientare, deşi corpul şi metrul şi-au modificat lungimea odată cu orientarea, şi tocmai pentru că schimbarea este aceeaşi pentru unul şi pentru celălalt. Altfel se prezintă însă lucrurile dacă nu mai măsurăm lungimea cu un metru, ci prin timpul necesar luminii pentru a o parcurge. E tocmai ce a făcut Michelson.

Un corp sferic, atunci când se află în repaus, ar lua astfel forma unui elipsoid de revoluţie turtit când s-ar afla în mişcare ; dar observatorul l-ar crede tot sferic, pentru că a suferit el însuşi o deformare asemănătoare, la fel ca toate obiectele ce-i servesc drept puncte de reper. Dimpotrivă, suprafeţele undelor de lumină, care au rămas riguros sferice, i-ar părea elipsoide alungite.

Ce se va întâmpla atunci ? Să presupunem un observator şi o sursă antrenaţi laolaltă în translaţie : suprafeţele de undă emanate de sursă ar fi sfere având drept centre poziţiile succesive ale sursei ; distanţa de la centru la poziţia actuală a sursei ar fi proporţională cu timpul scurs de la emisie, adică cu raza sferei. Toate aceste sfere sunt deci omotetice una faţă de alta, în raport cu poziţia actuală *S* a sursei. Dar, datorită contracţiei, pentru observatorul nostru toate aceste sfere ar părea elipsoide alungite, şi toate aceste elipsoide ar

fi iarăşi omotetice, în raport cu punctul S ; excentricitatea tuturor acestor elipsoide este aceeaşi şi depinde doar de viteza Pământului. *Vom alege legea contracţiei, astfel ca punctul S să fie situat în focarul secţiunii meridiane a elipsoidului.*

De această dată compensaţia este *riguroasă*. E ceea ce explică experienţa lui Michelson.

Am afirmat mai sus că, potrivit teoriilor obişnuite, observaţiile aberaţiei astronomice ne-ar putea face să cunoaştem viteza absolută a Pământului, dacă instrumentele noastre ar fi de o mie de ori mai precise. Trebuie să modific această concluzie. Da, unghiurile observate ar fi modificate datorită acestei viteze absolute, dar cercurile divizate de care ne folosim pentru a măsura unghiurile ar fi deformate de translaţie: ele ar deveni elipse. Ar rezulta de aici o eroare privind unghiul măsurat, şi *această a doua eroare ar compensa-o exact pe prima*.

Această ipoteză a lui Lorentz şi Fitzgerald ar părea, la prima vedere, cu totul extraordinară. Deocamdată, tot ce putem spune în favoarea ei este că ea constituie doar traducerea nemijlocită a rezultatului experimental al lui Michelson, dacă *se definesc* lungimile prin timpul necesar luminii pentru a le parcurge.

Oricum am privi lucrurile, este cu neputinţă să ne debarasăm de impresia că principiul relativităţii este o lege generală a naturii, că nu vom putea niciodată, prin nici un mijloc imaginabil, să punem în evidenţă decât viteze relative, şi înţeleg prin aceasta nu numai vitezele corpurilor în raport cu eterul, dar şi vitezele corpurilor unele în raport cu altele. Prea multe experienţe diferite au dat rezultate concordante ca să fim ispitiţi să atribuim principiului relativităţii o valoare comparativă cu cea a principiului echivalenţei, de exemplu. În orice caz, se cuvine să vedem la ce consecinţe ne-ar conduce acest mod de a vedea şi să supunem apoi aceste consecinţe controlului experienţei.

3. Principiul reacţiunii

Să vedem ce devine, în teoria lui Lorentz, principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii. Să presupunem un electron A care se pune în

mişcare dintr-o cauză oarecare. El produce o perturbaţie a eterului. După un anumit timp, această perturbaţie atinge un alt electron *B*, a cărui poziţie de echilibru va fi perturbată. În aceste condiţii, nu poate exista egalitate între acţiune şi reacţie, cel puţin dacă nu luăm în considerare eterul, ci numai electronii, *doar ei observabili*, pentru că materia noastră este formată din electroni.

Într-adevăr, electronul *A* a perturbat electronul *B*. Deşi electronul *B* va reacţiona asupra lui *A*, această reacţie ar putea fi egală cu acţiunea, dar în nici un caz n-ar putea fi simultană, pentru că electronul *B* n-ar putea intra în mişcare decât după un anumit timp, necesar pentru propagare. Dacă supunem problema unui calcul mai precis, se ajunge la rezultatul următor : să presupunem un excitator al lui Hertz situat în focarul unei oglinzi parabolice de care este legat mecanic ; acest excitator emite unde electromagnetice, şi oglinda reflectă toate aceste unde în aceeaşi direcţie ; excitatorul va propaga deci energie într-o direcţie determinată. Ei bine, calculul arată că excitatorul *va recula* asemenea unui tun care a tras un proiectil. În cazul tunului, reculul este rezultatul natural al egalităţii acţiunii şi reacţiunii. Tunul reculează pentru că proiectilul asupra căruia a acţionat reacţionează asupra lui.

Dar în cazul nostru lucrurile nu mai stau aşa. Ceea ce am lansat în depărtare nu mai e un proiectil material, ci energie, şi energia nu are masă : nu există contrabalansare. Şi, în locul unui excitator, am fi putut considera pur şi simplu o lampă cu un reflector care îşi concentrează razele într-o singură direcţie.

E adevărat că, dacă energia emisă de excitator sau de la lampă atinge un obiect material, acesta va suferi o împingere mecanică asemănătoare aceleia provocate de contactul cu un proiectil adevărat ; această împingere va fi egală cu reculul excitatorului sau al lămpii, dacă pe drum nu s-a putut pierde energie şi dacă obiectul absoarbe integral această energie. Am fi deci ispitiţi să spunem că se menţine şi aici compensaţia între acţiune şi reacţie. Dar această compensaţie, deşi completă, e totdeauna întârziată. Ea nu se produce niciodată dacă lumina, după ce va fi părăsit sursa, rătăceşte în spaţiile interstelare fără să întâlnească un corp material ; ea este incompletă în cazul în care corpul pe care îl loveşte nu e perfect absorbant.

Aceste acţiuni mecanice sunt oare prea mici ca să fie măsurate, ori sunt accesibile experienţei ? Ele sunt înseşi acţiunile datorate presiunilor *Maxwell-Bartholi*. Maxwell prevăzuse aceste presiuni prin intermediul unor calcule relative la electrostatică şi magnetism ; Bartholi ajunsese la acelaşi rezultat prin consideraţii de termodinamică.

În acest fel sunt explicate *cozile cometelor*. De nucleul planetei se desprind mici particule ; ele sunt lovite de lumina Soarelui, care le respinge asemenea unei ploi de proiectile venind de la Soare. Masa acestor particule e atât de mică, încât respingerea o smulge sub influenţa atracţiei newtoniene ; ele vor forma deci cozile care se îndepărtează de Soare.

Verificarea experimentală directă nu era uşor de realizat. Prima încercare a condus la construcţia *radiometrului*. Dar acest aparat *se roteşte invers*, în sensul opus sensului teoretic, şi explicaţia rotaţiei sale, descoperită de atunci, este cu totul diferită. În cele din urmă s-a reuşit, pe de o parte crescând vidul, pe de altă parte neînnegrind una din feţele paletelor şi îndreptând un fascicul luminos asupra uneia din feţe. Efectele radiometrice şi celelalte cauze perturbatoare sunt eliminate printr-o serie de precauţii minuţioase, şi se obţine o deviaţie care este foarte mică, dar, se pare, conformă cu teoria.

Aceleaşi efecte ale presiunii Maxwell-Bartholi sunt prevăzute deopotrivă de teoria lui Hertz, despre care am vorbit mai sus, şi de cea a lui Lorentz. Să presupunem că energia, sub formă de lumină, bunăoară, se deplasează de la o sursă luminoasă la un corp oarecare trecând printr-un mediu transparent. Presiunea Maxwell-Bartholi va acţiona nu doar asupra sursei de la care pleacă şi asupra corpului luminat la care soseşte, ci şi asupra materiei mediului transparent pe care îl străbate. În momentul în care unda luminoasă va atinge o regiune nouă a acestui mediu, presiunea va împinge înainte materia răspândită în el şi o va readuce înapoi atunci când unda va părăsi acea regiune. Încât reculul sursei este contracarat de mersul înainte al materiei transparente care e în contact cu sursa. Puţin mai târziu, reculul aceleiaşi materii este contracarat de mersul înainte al materiei transparente, care se află ceva mai încolo, şi aşa mai departe.

Este însă compensaţia perfectă ? Acţiunea presiunii Maxwell-Bartholi asupra materiei mediului transparent este egală cu reacţia sa asupra sursei, oricare ar fi acea materie ? Sau acţiunea este cu atât mai mică cu cât mediul este mai puţin refringent şi mai rarefiat, pentru ca în vid să devină nulă ? Dacă s-ar admite teoria lui Hertz, care priveşte materia ca legată mecanic de eter, astfel ca eterul să fie integral antrenat de materie, ar trebui să răspundem afirmativ la prima întrebare şi negativ la a doua.

Ar exista atunci o compensaţie perfectă, cum o cere principiul egalităţii acţiunii şi reacţiei, chiar în mediile cele mai puţin refringente, chiar în vidul interplanetar, unde ar fi suficient să presupunem un rest de materie, oricât de fină. Dacă, dimpotrivă, se admite teoria lui Lorentz, compensaţia, totdeauna imperfectă, este insensibilă în aer şi devine nulă în vid.

Am văzut însă mai sus că experienţa lui Fizeau nu permite păstrarea teoriei lui Hertz. Trebuie deci să adoptăm teoria lui Lorentz şi, în consecinţă, *să renunţăm la principiul reacţiunii*.

4. Consecinţe ale principiului relativităţii

Am văzut, mai sus, motivele care ne fac să considerăm principiul relativităţii ca pe o lege generală a naturii. Să vedem la ce consecinţe ne-ar conduce acest principiu, dacă l-am privi ca definitiv demonstrat.

În primul rând, ne obligă să generalizăm ipoteza lui Lorentz şi Fitzgerald despre contracţia tuturor corpurilor în sensul translaţiei. În particular, ar trebui să extindem această ipoteză la electronii înşişi. Abraham considera că electronii sunt sferici şi nedeformabili. Ar trebui să admitem că aceşti electroni, sferici în cazul în care se află în repaus, suferă contracţia Lorentz când sunt în mişcare şi iau atunci forma unor elipsoide turtite.

Această deformare a electronilor va influenţa asupra proprietăţilor lor mecanice. Spuneam, într-adevăr, că deplasarea electronilor încărcaţi este un adevărat curent de convecţie şi că inerţia lor aparentă se datorează selfinducţiei acestui curent : exclusiv în ce priveşte electronii negativi ; exclusiv sau nu, n-o ştim defel încă,

pentru electronii pozitivi. Ei bine, deformarea electronilor, care depinde de viteza lor, va modifica distribuţia electricităţii pe suprafaţa lor şi, în consecinţă, intensitatea curentului de convecţie pe care ei îl produc, ca şi legile după care selfinducţia acestui curent variază în funcţie de viteză.

Cu acest preţ, compensaţia va fi perfectă şi conformă cerinţelor principiului relativităţii, dar cu două condiţii :

1. Ca electronii pozitivi să nu aibă masă reală, ci doar o masă fictivă electromagnetică ; sau cel puţin ca masa lor reală, dacă există, să nu fie constantă şi să varieze cu viteza după aceleaşi legi ca masa lor fictivă ;

2. Ca toate forţele să fie de origine electromagnetică, sau cel puţin ca ele să varieze cu viteza după aceleaşi legi ca forţele de origine electromagnetică.

Tot Lorentz a făcut această sinteză remarcabilă. Să ne oprim o clipă asupra ei şi să vedem ce decurge din ea. În primul rând nu mai există materie, pentru că electronii pozitivi nu mai au masă reală, sau cel puţin nu mai au masă reală constantă. Principiile actuale ale mecanicii noastre, care se bazează pe constanţa masei, trebuie deci să fie modificate.

În al doilea rând, trebuie să căutăm o explicaţie electromagnetică a tuturor forţelor cunoscute, în particular a gravitaţiei, sau cel puţin să revizuim astfel legea gravitaţiei încât forţa să fie modificată de viteză în acelaşi mod ca forţele electromagnetice. Vom reveni asupra acestui punct.

Toate acestea păreau, la început, cam artificiale. Deformarea electronilor, mai ales, pare cu totul ipotetică. Dar putem prezenta altfel lucrurile, fără să punem această ipoteză a deformării la baza raţionamentului. Să considerăm electronii ca puncte materiale şi să ne întrebăm cum trebuie să varieze masa lor în funcţie de viteză pentru a nu contraveni principiului relativităţii. Sau, mai curând, să ne întrebăm care trebuie să fie acceleraţia lor sub influenţa unui câmp electric sau magnetic, pentru ca acest principiu să nu fie contrazis şi să regăsim legile obişnuite presupunând viteza foarte mică. Am vedea că variaţiile acestei mase sau ale acestor acceleraţii trebuie să se realizeze ca şi cum electronul ar suferi deformaţia Lorentz.

5. Experienţa lui Kaufmann

Suntem deci în prezenţa a două teorii : una în care electronii sunt deformabili — cea a lui Abraham ; alta în care electronii suferă deformarea Lorentz. În ambele cazuri, masa lor creşte proporţional cu viteza şi devine infinită atunci când se atinge viteza luminii. Dar legea variaţiei nu este aceeaşi. Metoda folosită de Kaufmann pentru a pune în evidenţă legea de variaţie a masei pare deci a ne oferi un mijloc experimental de a decide între cele două teorii.

Din nefericire, primele sale experienţe nu erau îndeajuns de precise pentru atingerea acestui obiectiv. De aceea s-a considerat că este necesar să fie reluate cu mai multe precauţii şi să se măsoare cu mare atenţie intensitatea câmpurilor. În forma lor nouă, *ele au dat dreptate teoriei lui Abraham*. Principiul relativităţii n-ar avea deci valoarea riguroasă pe care eram înclinaţi să i-o atribuim. N-am mai avea nici un motiv să credem că electronii pozitivi sunt lipsiţi de masă reală ca şi electronii negativi.

Totuşi, înainte de a adopta definitiv această concluzie, este necesară puţină reflecţie. Chestiunea este de o asemenea importanţă, încât ar fi de dorit ca experienţa lui Kaufmann să fie reluată de un alt experimentator*. Din nefericire, această experienţă este foarte delicată şi n-ar putea fi dusă la bun sfârşit decât de către un fizician la fel de iscusit ca şi Kaufmann. Au fost luate cum se cuvine toate precauţiile şi nu se vede bine ce obiecţii s-ar putea face.

Există totuşi un punct asupra căruia aş dori să atrag atenţia : asupra măsurării câmpului electrostatic, de care depinde totul. Acest câmp era produs între cele două armături ale unui condensator ; între aceste armături a trebuit să se realizeze un vid extrem de pronunţat, pentru a obţine o izolare completă. S-a măsurat atunci diferenţa de potenţial dintre cele două armături şi s-a obţinut câmpul împărţind această diferenţă la distanţa dintre

---

* În momentul tipăririi textului nostru aflăm că Bucherer a reluat experienţa asumându-şi precauţii noi şi că a obţinut, contrar lui Kaufmann, rezultate care confirmă vederile lui Lorentz.

armături. Este implicată aici presupoziţia uniformităţii câmpului. Este ea sigură ? Nu poate surveni o cădere bruscă de potenţial în vecinătatea uneia din armături, a celei negative, de exemplu ? Poate exista o diferenţă de potenţial la contactul între metal şi vid, şi se poate întâmpla ca această diferenţă să nu fie aceeaşi de partea pozitivă şi de cea negativă. Efectele de supapă electrică între mercur şi vid m-ar face s-o cred. Oricât de mică ar fi probabilitatea ca lucrurile să se petreacă astfel, se pare că nu trebuie s-o neglijăm.

6. Principiul inerţiei

În noua dinamică, principiul inerţiei — faptul că un electron *izolat* ar avea o mişcare rectilinie şi uniformă — rămâne adevărat. Cel puţin aceasta este părerea generală. Totuşi, Lindemann a adus obiecţii acestui mod de a vedea. Nu pot lua o hotărâre în cadrul acestei dezbateri, pe care nu pot s-o expun aici datorită caracterului ei prea dificil. În orice caz, ar fi suficiente modificări minore aduse teoriei pentru a ne pune la adăpost împotriva obiecţiilor lui Lindemann.

Se ştie că un corp scufundat într-un lichid, atunci când se află în mişcare, întâmpină o rezistenţă considerabilă, dar acest fenomen se datorează faptului că fluidele noastre sunt vâscoase. Într-un lichid ideal, complet lipsit de vâscozitate, corpul ar agita înapoia lui o pupă lichidă, un fel de siaj. Ar fi necesar, la început, un mare efort pentru a-l pune în mişcare, întrucât ar trebui urnit nu doar corpul, ci şi lichidul siajului său. Odată dobândită însă mişcarea, ea s-ar perpetua fără rezistenţă, deoarece corpul, înaintând, ar transporta pur şi simplu cu el perturbaţia lichidului, fără ca forţa vie totală a acestui lichid să crească. Totul s-ar petrece deci ca şi cum inerţia lui s-ar fi mărit. Un electron care înaintează în eter s-ar comporta în acelaşi fel : în jurul lui eterul ar fi agitat, dar această perturbaţie ar însoţi corpul în mişcarea sa ; încât pentru un observator antrenat împreună cu electronul, câmpurile electric şi magnetic care însoţesc electronul ar părea invariabile şi nu s-ar putea schimba decât dacă viteza electronului ar varia. Ar fi deci necesară o forţă pentru a pune electronul în mişcare, pentru că ar trebui

creată energia acestor câmpuri ; dimpotrivă, odată dobândită mişcarea, n-ar mai fi necesară nici o forţă pentru a o menţine, deoarece energia creată ar mai trebui doar să se transforme înapoia electronului ca un siaj. Aşadar, această energie nu poate să crească energia electronului, aşa cum agitaţia lichidului creşte energia corpului scufundat într-un lichid perfect. Şi cel puţin electronii negativi nu au altă inerţie decât aceasta.

În ipoteza lui Lorentz, forţa vie, adică energia eterului, nu este proporţională cu v^2. Fără îndoială, dacă v este foarte mică, forţa vie este sensibil proporţională cu v^2, cantitatea de mişcare sensibil proporţională cu v, cele două mase sensibil constante şi egale între ele. *Dar atunci când viteza tinde spre viteza luminii, forţa vie, cantitatea de mişcare şi cele două mase cresc peste orice limită.*

În ipoteza lui Abraham, expresiile sunt ceva mai complicate ; dar ceea ce spuneam rămâne valabil în linii esenţiale.

Astfel masa, cantitatea de mişcare, forţa vie devin infinite atunci când viteza devine egală cu viteza luminii. Rezultă de aici că *nici un corp nu va putea atinge prin nici un mijloc o viteză mai mare decât viteza luminii*. Într-adevăr, pe măsură ce creşte viteza corpului, creşte şi masa lui, încât inerţia lui opune oricărei creşteri a vitezei un obstacol din ce în ce mai mare.

Se pune atunci o problemă. Să admitem principiul relativităţii. Un observator în mişcare nu trebuie să dispună de mijlocul prin care să-şi dea seama de propria sa mişcare. Dacă deci nici un corp în mişcarea sa absolută nu poate depăşi viteza luminii, dar se poate apropia de ea oricât dorim, la fel trebuie să fie în ce priveşte mişcarea sa relativă în raport cu observatorul nostru. Şi atunci am putea fi ispitiţi să raţionăm după cum urmează. Observatorul poate atinge o viteză de 200 000 de kilometri ; corpul în mişcarea sa relativă în raport cu observatorul poate atinge aceeaşi viteză ; viteza sa absolută ar fi atunci de 400 000 de kilometri, ceea ce este imposibil, pentru că această cifră depăşeşte viteza luminii. E aici doar o aparenţă, care dispare dacă ţinem seamă de felul în care Lorentz evaluează timpurile locale.

7. Unda de acceleraţie

Un electron aflat în mişcare produce în eterul ce-l înconjoară o perturbaţie. Dacă mişcarea lui este rectilinie şi uniformă, această perturbaţie se reduce la siajul despre care vorbeam în capitolul precedent. Altfel stau însă lucrurile dacă mişcarea este curbilinie sau variată. Perturbaţia poate fi atunci considerată ca suprapunerea a altor două, pe care Langevin le-a numit *undă de viteză* şi *undă de acceleraţie*.

Unda de viteză e tocmai siajul care se produce în mişcarea uniformă.

Cât priveşte unda de acceleraţie, ea este o perturbaţie cu totul asemănătoare undelor luminoase, care pleacă de la electron în momentul în care acesta suferă o acceleraţie, şi care se propagă apoi prin unde sferice succesive cu viteza luminii.

Rezultă de aici următoarea consecinţă : într-o mişcare rectilinie şi uniformă, energia se conservă integral ; dar atunci când există o acceleraţie, are loc o pierdere de energie, care se risipeşte sub formă de unde luminoase şi se propagă la infinit prin eter.

Totuşi, efectele acestei unde de acceleraţie, în particular pierderea de energie corespunzătoare, sunt neglijabile în majoritatea cazurilor, adică nu numai în mecanica ondulatorie şi în mişcările corpurilor cereşti, ci chiar în radiaţiile radiului, unde viteza este foarte mare, nu şi acceleraţia. Ne putem atunci limita să aplicăm legile mecanicii, scriind că forţa este egală cu produsul dintre acceleraţie şi masă, această masă variind totuşi cu viteza după legile expuse mai sus. Se spune atunci că mişcarea este *cvasi-staţionară*.

Nu la fel se întâmplă în toate cazurile în care acceleraţia este mare ; cele mai importante sunt următoarele : 1. În gazele incandescente, anumiţi electroni dobândesc o mişcare oscilatorie de foarte înaltă frecvenţă ; deplasările sunt foarte mici, vitezele sunt finite şi acceleraţiile foarte mari ; energia se comunică atunci eterului şi aşa se face că aceste gaze radiază lumină având aceeaşi perioadă ca oscilaţiile electronului ; 2. Invers, atunci când un gaz primeşte lumină, aceiaşi electroni sunt puşi în mişcare cu acceleraţii mari şi absorb lumină ; 3. În excitatorul lui Hertz, electro-

nii care circulă în masa metalică suferă, în momentul descărcării, o bruscă acceleraţie şi dobândesc apoi o mişcare oscilatorie de înaltă frecvenţă. Rezultă de aici că o parte din energie radiază sub formă de unde hertziene ; 4. Într-un metal incandescent, electronii din acel metal se deplasează cu viteze mari ; ajungând la suprafaţa metalului, de care nu pot trece, ei se reflectă şi suferă astfel o acceleraţie considerabilă. De aceea metalul emite lumină. E ceea ce am explicat deja în capitolul X, paragraful IV. Detaliile legilor emisiei luminii de către corpurile negre sunt perfect explicate de această ipoteză ; 5. În sfârşit, atunci când radiaţiile catodice se lovesc de anticatod, electronii negativi care constituie aceste radiaţii, şi care se mişcă cu viteze foarte mari, sunt brusc opriţi. Datorită acceleraţiei pe care o suferă astfel, ei produc ondulaţii în eter. Aceasta ar fi, după unii fizicieni, originea radiaţiilor Röntgen, care n-ar fi altceva decât radiaţii luminoase de foarte scurtă lungime de undă.

CAPITOLUL III

Mecanica nouă şi astronomia

1. Gravitaţia

Masa poate fi definită în două feluri : 1. Prin raportul dintre forţă şi acceleraţie ; aceasta este adevărata definiţie a masei, care măsoară inerţia corpului ; 2. Prin atracţia pe care o exercită corpul asupra unui corp exterior, în virtutea legii lui Newton. Trebuie deci să deosebim masa coeficient de inerţie şi masa coeficient de atracţie. Potrivit legii lui Newton, există o proporţionalitate riguroasă între cei doi coeficienţi. Dar acest lucru este demonstrat numai pentru vitezele cărora le sunt aplicabile principiile generale ale dinamicii. Acum am văzut că masa coeficient de inerţie creşte cu viteza. Trebuie oare să conchidem că masa coeficient de atracţie creşte şi ea cu viteza şi rămâne proporţională cu coeficientul de inerţie sau, dimpotrivă, că acest coeficient de atracţie rămâne constant ? Nu avem nici un mijoc de a decide asupra acestei întrebări.

Pe de altă parte, dacă coeficientul de atracţie depinde de viteză, dat fiind că vitezele celor două corpuri care se atrag reciproc nu sunt în general aceleaşi, cum ar depinde acest coeficient de cele două viteze ?

Nu putem face în această privinţă decât ipoteze, dar, firește, trebuie să vedem care dintre aceste ipoteze ar fi compatibile cu principiul relativităţii. Multe. Voi vorbi aici doar despre ipoteza lui Lorentz, pe care o voi expune pe scurt.

Să considerăm mai întâi electroni în repaus. Doi electroni de acelaşi semn se resping şi doi electroni de semn contrar se atrag. În teoria obişnuită, acţiunile lor reciproce sunt proporţionale cu sarcinile lor electrice. Dacă deci avem patru electroni, doi pozitivi — A şi A′ — şi doi negativi — B şi B′ —, şi dacă sarcinile celor patru electroni rămân aceleaşi, în valoare absolută, respingerea

exercitată de A asupra lui A′ va fi, la aceeaşi distanţă, egală cu respingerea exercitată de B asupra lui B′ şi de asemenea egală cu atracţia lui A asupra lui B′, sau a lui A′ asupra lui B. Aşadar, dacă A şi B sunt foarte aproape unul de altul, la fel ca A′ şi B′, şi dacă studiem acţiunea sistemului A + B asupra sistemului A′ + B′, am avea două respingeri şi două atracţii care s-ar compensa exact şi acţiunea rezultantă ar fi nulă.

Or, moleculele materiale trebuie privite tocmai ca un fel de sisteme solare în care circulă electronii, unii negativi, alţii pozitivi, *astfel încât suma algebrică a tuturor sarcinilor să fie nulă*. O moleculă materială este deci perfect asimilabilă sistemului A + B de care vorbeam, astfel că acţiunea electrică totală a celor două molecule una asupra celeilalte ar trebui să fie nulă.

Dar experienţa ne arată că acele molecule se atrag datorită gravitaţiei newtoniene. Şi atunci putem face două ipoteze : fie putem presupune că gravitaţia nu are nici o legătură cu atracţiile electrostatice, că deci se datorează unei cauze complet diferite şi că pur şi simplu li se suprapune ; fie putem presupune că nu există proporţionalitate între atracţii şi sarcini şi că atracţia exercitată de o sarcină +1 asupra unei sarcini −1 este mai mare decât respingerea reciprocă a două sarcini +1, sau decât cea a două sarcini −1.

Cu alte cuvinte, câmpul electric produs de electronii pozitivi şi cel pe care îl produc electronii negativi s-ar suprapune rămânând distincte. Electronii pozitivi ar fi mai sensibili la câmpul produs de electronii negativi decât la câmpul produs de electronii pozitivi. Cu electronii negativi s-ar întâmpla contrariul. E clar că această ipoteză complică puţin electrostatica, dar ea face loc gravitaţiei. Aceasta era, în definitiv, ipoteza lui Franklin.

Ce se întâmplă acum dacă electronii sunt în mişcare ? Electronii pozitivi ar genera o perturbaţie în eter şi ar da naştere aici unui câmp electric şi unui câmp magnetic. La fel în cazul electronilor negativi. Electronii — atât pozitivi cât şi negativi — ar suferi apoi o excitare mecanică datorită acţiunii acestor diferite câmpuri. În teoria ondulatorie, câmpul electromagnetic, datorat mişcării electronilor pozitivi, exercită asupra celor doi electroni de semn contrar şi având aceeaşi sarcină absolută acţiuni egale şi de semn con-

trar. Putem atunci fără nici un inconvenient să nu distingem câmpul datorat mişcării electronilor pozitivi şi câmpul datorat mişcării electronilor negativi şi să considerăm doar suma algebrică a celor două câmpuri, altfel zis, câmpul rezultant.

În noua teorie, dimpotrivă, acţiunea asupra electronilor pozitivi a câmpului electromagnetic datorat electronilor pozitivi se face după legile obişnuite ; la fel în ce priveşte acţiunea asupra electronilor negativi a câmpului datorat electronilor negativi. Să considerăm acum acţiunea câmpului datorat electronilor pozitivi asupra electronilor negativi (sau invers) ; ea va urma aceleaşi legi, dar *cu un coeficient diferit*. Fiecare electron este mai sensibil la câmpul creat de electronii de semn contrar decât la câmpul creat de electronii de acelaşi semn.

Aceasta este ipoteza lui Lorentz, care se reduce la ipoteza lui Franklin în cazul vitezelor mici. Ea ar da seama, deci, pentru aceste viteze mici, de legea lui Newton. Mai mult, dat fiind că gravitaţia se reduce la forţe de origine electrodinamică, teoria generală a lui Lorentz i se va aplica şi, în consecinţă, principiul relativităţii nu va fi încălcat.

Se observă că legea lui Newton nu mai e aplicabilă în cazul vitezelor mari şi că ea trebuie să fie modificată, pentru corpurile în mişcare, exact în acelaşi fel ca legile electrostaticii pentru electricitatea în mişcare.

Se ştie că perturbaţiile electromagnetice se propagă cu viteza luminii. Am fi deci ispitiţi să respingem teoria precedentă, reamintind că gravitaţia se propagă, potrivit calculelor lui Laplace, cel puţin de zece milioane de ori mai repede decât lumina şi că, în consecinţă, ea nu poate fi de origine electrodinamică. Rezultatul lui Laplace este binecunoscut, dar i se ignoră în general semnificaţia. Laplace presupunea că, dacă propagarea gravitaţiei nu este instantanee, viteza sa de propagare se combină cu cea a corpului atras, ca în cazul luminii în fenomenul aberaţiei astronomice, astfel încât forţa efectivă nu este orientată după dreapta care uneşte cele două corpuri, ci face un mic unghi cu această dreaptă. Aceasta este o ipoteză cu totul specială, destul de prost justificată şi, în orice caz, complet diferită de cea a lui Lorentz. Rezultatul lui Laplace nu contrazice cu nimic teoria lui Lorentz.

2. Comparaţia cu observaţiile astronomice

Pot fi conciliate teoriile precedente cu observaţiile astronomice ? Mai întâi, dacă le adoptăm, energia mişcărilor planetare ar fi constant disipată de efectul *undei de acceleraţie*. Ar rezulta de aici că mişcările medii ale aştrilor s-ar accelera constant, ca şi cum aceşti aştri s-ar mişca într-un mediu rezistent. Dar acest efect este mult prea slab pentru a fi decelat prin observaţiile cele mai precise. Acceleraţia corpurilor cereşti este relativ slabă, astfel că efectele undei de acceleraţie sunt neglijabile, iar mişcarea poate fi privită ca *cvasistaţionară*. Este adevărat că efectele undei de acceleraţie se acumulează constant, dar însăşi această acumulare e atât de lentă, încât ar fi nevoie de multe mii de ani de observaţie pentru ca ea să poată fi observată.

Să facem deci calculul considerând mişcarea ca cvasistaţionară, în următoarele trei ipoteze :

A. Să admitem ipoteza lui Abraham (electroni nedeformabili) şi să păstrăm legea lui Newton în forma ei obişnuită ;

B. Să admitem ipoteza lui Lorentz asupra deformării electronilor şi să păstrăm legea obişnuită a lui Newton ;

C. Să admitem ipoteza lui Lorentz asupra electronilor şi să modificăm legea lui Newton, aşa cum am făcut-o în paragraful precedent, astfel încât să o facem compatibilă cu principiul relativităţii.

Efectul ar fi cel mai sesizabil în cazul mişcării lui Mercur, pentru că această planetă are viteza mai mare. Tisserand făcuse altădată un calcul asemănător, admiţând legea lui Weber. Reamintesc că Weber încercase să explice în acelaşi timp fenomenele electrostatice şi electrodinamice presupunând că electronii (al căror nume nu fusese încă inventat) exercită între ei atracţii şi respingeri orientate după dreapta care îi uneşte, şi care depind nu numai de distanţele dintre ei, ci şi de derivatele prime şi secunde ale acestor distanţe, în consecinţă, de vitezele şi acceleraţiile lor. Legea lui Weber, destul de diferită de cele care tind să prevaleze azi, prezintă totuşi o anumită analogie cu acestea.

Tisserand a stabilit că, dacă atracţia newtoniană s-ar exercita conform legii lui Weber, ar rezulta de aici, pentru periheliul lui

Mercur, o variaţie seculară de 14", *având acelaşi sens ca variaţia care a fost observată şi n-a putut fi explicată*, dar mai mică, întrucât aceasta din urmă este de 38".

Să revenim la ipotezele A, B şi C, şi să studiem mai întâi mişcarea unei planete atrase de un centru fix. În acest caz, ipotezele B şi C nu se mai deosebesc, deoarece, dacă punctul de atracţie este fix, câmpul produs de el este un câmp pur electrostatic, unde atracţia variază invers proporţional cu pătratul distanţelor, conform legii electrostatice a lui Coulomb, identică cu cea a lui Newton.

Dacă se adoptă pentru forţa vie definiţia nouă, ecuaţia forţelor vii se păstrează ; la fel, ecuaţia ariilor este înlocuită cu o altă echivalenţă ; momentul cantităţii de mişcare este o constantă, dar cantitatea de mişcare trebuie să fie definită ca în noua dinamică.

Singurul efect observabil ar fi o mişcare seculară a periheliului. Cu teoria lui Lorentz am obţine, pentru această mişcare, jumătate din ceea ce oferea legea lui Weber ; cu teoria lui Abraham, cele două cincimi.

Dacă presupunem acum două corpuri mobile care gravitează în jurul centrului lor de gravitate comun, efectele sunt foarte puţin diferite, deşi calculele sunt ceva mai complicate. Mişcarea periheliului lui Mercur ar fi deci de 7" în teoria lui Lorentz şi de 5" sau 6" în cea a lui Abraham.

Efectul este de altfel proporţional cu n^3a^2, n fiind mişcarea medie a astrului şi a raza orbitei sale. În cazul planetelor, în virtutea legii lui Kepler, efectul variază deci invers proporţional cu $\sqrt{a^5}$; el nu poate fi deci observat, cu excepţia planetei Mercur.

Nici în cazul Lunii nu poate fi observat acest efect, deşi n este mare, pentru că a este foarte mic. Pe scurt, el este de cinci ori mai mic pentru Venus, şi de şase sute de ori mai mic pentru Lună, ca şi pentru Mercur. Să adăugăm că, în ce priveşte planetele Venus şi Pământ, mişcarea periheliului (pentru o aceeaşi viteză unghiulară a acestei mişcări) ar fi mult mai greu de decelat prin observaţiile astronomice, pentru că excentricitatea orbitelor este mult mai mică decât în cazul lui Mercur.

În rezumat, *singurul efect accesibil observaţiilor astronomice ar fi o mişcare a periheliului lui Mercur, având acelaşi sens cu cea care a fost observată fără să fie explicată, dar mult mai slabă.*

Acest lucru nu poate fi privit ca un argument în favoarea noii dinamici, pentru că ar trebui să căutăm mereu o nouă explicaţie pentru cea mai mare parte a anomaliei lui Mercur ; dar şi mai puţin poate fi privit ca un argument împotriva ei.

3. Teoria lui Lesage

Se cuvine să apropiem aceste consideraţii de o teorie propusă de multă vreme pentru a explica gravitaţia universală. Să presupunem că în spaţiile interplanetare circulă în toate sensurile, cu viteze foarte mici, corpusculi infimi. Un corp izolat în spaţiu nu ar fi afectat, în aparenţă, de şocurile acestor corpusculi, pentru că ele s-ar repartiza egal în toate direcţiile. Dacă însă două corpuri A şi B se află faţă în faţă, corpul B va juca rolul de ecran şi va intercepta o parte din corpusculii care, în absenţa lui, l-ar fi lovit pe A. Atunci, şocurile primite de A din direcţia opusă celei a lui B nu vor mai fi — sau vor fi doar imperfect — compensate şi îl vor împinge pe A spre B.

Aceasta este teoria lui Lesage. O vom discuta situându-ne mai întâi pe punctul de vedere al mecanicii obişnuite. Cum trebuie să se producă şocurile prevăzute de această teorie ? După legile corpurilor perfect elastice sau după cele ale corpurilor lipsite de elasticitate, sau după o lege intermediară ? Corpusculii lui Lesage nu se pot comporta ca nişte corpuri perfect elastice ; altfel, efectul ar fi nul, deoarece corpusculii interceptaţi de corpul B ar fi înlocuiţi de alţii care vor fi ricoşat din B, şi deoarece calculul dovedeşte că atunci compensaţia ar fi perfectă.

Trebuie deci ca şocul să determine o pierdere de energie din partea corpusculilor şi această energie ar trebui să se regăsească sub formă de căldură. Dar care ar fi cantitatea de căldură astfel produsă ? Să observăm că atracţia trece prin corpuri. Trebuie deci să ne reprezentăm Pământul, de exemplu, nu ca un ecran plin, ci ca fiind format dintr-un foarte mare număr de molecule sferice foarte

mici, care joacă fiecare în parte rolul de mici ecrane, dar între care corpusculii lui Lesage pot să circule liber. Astfel, nu doar că Pământul nu este un ecran plin, dar nu este nici măcar o strecurătoare, pentru că vidul ocupă aici mult mai mult loc decât plinul. Ca să ne dăm seama de acest lucru, reamintim că Laplace a demonstrat că atracţia, străbătând Pământul, scade cel mult cu o a zecea milionime, şi demonstraţia sa nu lasă nimic de dorit. Dacă, într-adevăr, atracţia ar fi absorbită de corpurile pe care le străbate, nu ar mai fi proporţională cu masele ; ea ar fi *relativ* mai slabă pentru corpurile mici, pentru că ar avea o grosime mai mare de traversat. Atracţia Soarelui asupra Pământului ar fi deci *relativ* mai slabă decât cea a Soarelui asupra Lunii, şi ar rezulta de aici, în mişcarea Lunii, o foarte mare inegalitate. Trebuie deci să conchidem, dacă adoptăm teoria lui Lesage, că suprafaţa totală a moleculelor sferice care compun Pământul este cel mult a zecea milionime parte din suprafaţa totală a Pământului.

E. Darwin a demonstrat că teoria lui Lesage nu conduce exact la legea lui Newton decât presupunând corpusculi complet lipsiţi de elasticitate. Atracţia exercitată de Pământ asupra unei mase 1 la distanţa 1 ar fi atunci proporţională, simultan, cu suprafaţa totală S a moleculelor sferice care îl compun, cu viteza v a corpusculilor, cu rădăcina pătrată a densităţii ρ a mediului format de corpusculi. Căldură produsă ar fi proporţională cu S, cu densitatea ρ şi cu cubul vitezei v.

Dar trebuie să ţinem seama de rezistenţa resimţită de un corp care se mişcă într-un asemenea mediu. El nu se poate mişca, într-adevăr, fără să se deplaseze în faţa unor şocuri, evitându-le, dimpotrivă, pe cele care vin din direcţia opusă, astfel încât compensaţia realizată în starea de repaus nu se mai poate menţine. Rezistenţa calculată este proporţională cu S, cu ρ şi cu v ; or, corpurile cereşti, după cum se ştie, se deplasează ca şi cum nu ar resimţi nici o rezistenţă, şi precizia observaţiilor ne permite să fixăm rezistenţei mediului o limită.

Întrucât această rezistenţă variază cu $S\rho v$, în timp ce atracţia variază cu $S\sqrt{\rho v}$, observăm că raportul dintre rezistenţă şi pătratul atracţiei este invers proporţional cu produsul Sv.

Avem deci o limită inferioară a produsului Sv. Aveam deja o limită superioară a lui S (datorită absorbţiei atracţiei de către corpurile pe care le traversează) ; avem deci o limită inferioară a vitezei v, care trebuie să fie cel puţin egală cu $24 \cdot 10^{17}$ ori viteza luminii.

Putem deduce de aici ρ şi cantitatea de căldură produsă. Această cantitate ar fi suficientă pentru a ridica temperatura cu 10^{26} grade pe secundă. Pământul ar primi într-un timp dat de 10^{20} ori mai multă căldură decât emite Soarele în acelaşi timp. Nu vreau să vorbesc despre căldura pe care Soarele o trimite Pământului, ci de aceea pe care o împrăştie în toate direcţiile.

Este evident că Pământul n-ar rezista multă vreme la un asemenea regim.

N-am ajunge la rezultate mai puţin fantastice în cazul în care, contrar vederilor lui Darwin, am înzestra corpusculii lui Lesage cu o elasticitate imperfectă, nu însă nulă. Într-adevăr, forţa vie a acestor corpusculi nu ar fi complet convertită în căldură, dar şi atracţia produsă ar fi mai mică, astfel încât numai partea din această forţă vie convertită în căldură ar contribui la producerea atracţiei şi ar fi acelaşi lucru.

Putem transforma teoria lui Lesage. Să suprimăm corpusculii şi să ne imaginăm că eterul este străbătut în toate sensurile de unde luminoase venite din toate punctele spaţiului. Atunci când un obiect material e atins de o undă luminoasă, această undă exercită asupra lui o acţiune mecanică datorată presiunii Maxwell-Bartholi, ca şi cum ar fi primit şocul unui proiectil material. Undele despre care vorbim ar putea deci să joace rolul corpusculilor lui Lesage. E ceea ce admite, de exemplu, Tommasina.

Dificultăţile nu sunt astfel înlăturate. Viteza de propagare nu poate fi decât a luminii şi se ajunge astfel, în ce priveşte rezistenţa mediului, la o cifră inadmisibilă. De altminteri, dacă lumina se reflectă integral, efectul este nul, ca şi în ipoteza corpusculilor perfect elastici. Ca să existe atracţie, trebuie ca lumina să fie parţial absorbită. Dar atunci se produce căldură. Calculele nu diferă esenţial de cele făcute în teoria obişnuită a lui Lesage şi rezultatul păstrează acelaşi caracter fantastic.

Pe de altă parte, atracţia nu este absorbită — sau este absorbită într-o măsură infimă — de corpurile pe care le străbate. Nu la fel se întâmplă în cazul luminii pe care o cunoaştem. Lumina care ar produce atracţia newtoniană ar trebui să fie radical diferită de lumina obişnuită ; ar trebui să aibă, de exemplu, o lungime de undă foarte scurtă. Fără a mai socoti că, dacă ochii noştri ar fi sensibili la această lumină, cerul întreg ar trebui să ne apară mult mai strălucitor decât Soarele, astfel încât Soarele ne-ar apărea a se detaşa de cer, ca un corp întunecat, altfel el ne-ar respinge în loc să ne atragă. Pentru toate aceste motive, lumina care ne-ar permite să explicăm atracţia ar trebui să se apropie mult mai mult de radiaţiile X ale lui Röntgen decât de lumina obişnuită.

Radiaţiile X n-ar fi încă suficiente. Oricât de penetrante ni s-ar părea, ele n-ar putea străbate Pământul întreg. Ar trebui deci să imaginăm radiaţiile X′ mult mai penetrante decât radiaţiile X obişnuite. Apoi o parte din energia radiaţiilor X′ ar trebui să fie distrusă, altfel n-ar exista atracţie. Dacă nu vrem ca ea să fie transformată în căldură, ceea ce ar conduce la o producţie uriaşă de căldură, trebuie să admitem că este radiată în toate sensurile sub forma unor radiaţii secundare — pe care le-am putea numi X″ — care ar trebui să fie mult mai penetrante decât radiaţiile X′, altfel ele ar tulbura la rândul lor fenomenele de atracţie.

Acestea sunt ipotezele complicate la care se ajunge în cazul în care vrem să facem viabilă teoria lui Lesage.

Dar tot ce spuneam presupune legile obişnuite ale mecanicii. Ar fi oare de preferat să admitem noua dinamică ? Şi, mai întâi, putem menţine principiul relativităţii ? Să începem prin a conferi teoriei lui Lesage forma sa iniţială şi să presupunem că spaţiul e străbătut de corpusculi materiali. Dacă aceşti corpusculi ar fi perfect elastici, legile şocului lor ar fi conforme principiului relativităţii, dar ştim că atunci efectul lor ar fi nul. Trebuie deci să presupunem că aceşti corpusculi nu sunt elastici, şi în acest caz e greu de imaginat o lege a şocului compatibilă cu principiul relativităţii. De altminteri, s-ar obţine iarăşi o producţie de căldură considerabilă şi totuşi o rezistenţă a mediului foarte sensibilă.

Dacă suprimăm corpusculii şi dacă revenim la ipoteza presiunii Maxwell-Bartholi, dificultăţile n-ar fi mai mici. E ceea ce a încercat Lorentz însuşi în expunerea din 25 aprilie 1900 făcută la Academia de ştiinţe din Amsterdam.

Să considerăm un sistem de electroni scufundaţi într-un eter străbătut în toate sensurile de unde luminoase. În aceste condiţii, un electron lovit de o undă va intra în vibraţie. Vibraţia lui va fi sincronă cu cea a luminii. Ar putea exista însă o diferenţă de fază, dacă electronul absoarbe o parte din energia incidentă. Dacă absoarbe efectiv energie, înseamnă că vibraţia eterului *antrenează* electronul. Electronul trebuie deci să fie în întârziere faţă de eter. Un electron în mişcare este asimilabil unui curent de convecţie; deci orice câmp magnetic, în particular cel datorat perturbaţiei luminoase înseşi, trebuie să exercite o acţiune mecanică asupra electronului. Această acţiune este foarte slabă. În plus, ea îşi schimbă semnul în cursul perioadei. Totuşi, acţiunea medie nu este nulă dacă există o diferenţă de fază între vibraţiile electronului şi cele ale eterului. Acţiunea medie este proporţională cu această diferenţă, în consecinţă cu energia absorbită de electron.

Nu pot intra aici în detaliul calculelor. Să spunem doar că rezultatul final este o atracţie între doi electroni oarecare, care variază invers proporţional cu pătratul distanţelor şi este proporţională cu energia absorbită de cei doi electroni.

Aşadar nu poate exista atracţie fără absorbţie de lumină şi, în consecinţă, fără producere de căldură. E ceea ce l-a determinat pe Lorentz să abandoneze această teorie, care nu diferă în fond de cea a lui Lesage-Maxwell-Bartholi. El ar fi fost mult mai neliniştit dacă ar fi dus calculul până la capăt. Ar fi găsit că temperatura Pământului ar trebui să crească cu 10^{13} grade pe secundă.

4. Concluzii

M-am străduit să ofer succint o idee pe cât posibil completă cu privire la aceste teorii noi. Am încercat să explic cum s-au născut ele, altfel cititorul ar fi avut motive să fie îngrijorat de îndrăzneala

lor. Teoriile noi nu sunt încă demonstrate. Mai e mult până acolo. Ele se sprijină pe un ansamblu numeros de posibilităţi, încât nu avem dreptul să le tratăm cu dispreţ.

Noi experienţe ne vor arăta, fără îndoială, ce trebuie să gândim despre ele în cele din urmă. Nodul problemei se află în experienţa lui Kaufmann şi în experienţele care vor putea fi puse la cale pentru a o verifica.

În încheiere, îngăduiţi-mi să exprim o dorinţă. Să presupunem că peste câţiva ani aceste teorii trec cu bine probele noi la care sunt supuse. Învăţământul nostru secundar s-ar expune atunci unui mare pericol: unii profesori vor dori, fără îndoială, să facă loc noilor teorii. Noutăţile sunt atât de atrăgătoare şi e atât de dur să nu pari îndeajuns de avansat ! Ei vor dori, cel puţin, să le deschidă copiilor vederi de ansamblu şi înainte de a le preda mecanica obişnuită îi vor avertiza că este depăşită. Şi atunci ei nu-şi vor însuşi temeinic mecanica obişnuită.

Este bine să-i avertizăm că nu e decât aproximativă ? Da, dar mai târziu, când se vor fi pătruns de ea până-n măduva oaselor, când vor fi dobândit deprinderea de a gândi numai prin ea, când nu vor mai risca s-o uite, atunci vom putea, fără nici un inconvenient, să le arătăm limitele ei.

Cu mecanica obişnuită trebuie ei să trăiască ; e singura pe care vor avea s-o aplice vreodată. Oricare ar fi progresele automobilismului, maşinile noastre nu vor atinge niciodată vitezele pentru care ea nu mai este adevărată. Cealaltă este doar un lux şi nu trebuie să ne gândim la un lux decât atunci când el nu mai riscă să dăuneze necesarului.

CARTEA A PATRA

Ştiinţa astronomică

CAPITOLUL I

Calea Lactee şi teoria gazelor

Consideraţiile pe care vreau să le dezvolt aici au atras puţin până acum atenţia astronomilor. N-aş avea de citat decât o idee ingenioasă a lordului Kelvin, care ne-a deschis un nou câmp de cercetări, dar care aşteaptă încă să fie urmată. Nu am nici eu de comunicat rezultate originale. Tot ce pot face este să ofer o idee asupra problemelor care se pun, dar de care nimeni până acum nu s-a preocupat să le rezolve.

Toată lumea ştie cum îşi reprezintă compoziţia gazelor un mare număr de fizicieni moderni. Gazele sunt formate dintr-o multitudine nenumărabilă de molecule care, deplasându-se cu viteze mari, se încrucişează şi se întretaie în toate sensurile. Aceste molecule acţionează probabil la distanţă unele asupra altora, dar această acţiune descreşte foarte rapid funcţie de distanţă, încât traiectoriile lor rămân sensibil rectilinii. Ele nu mai sunt rectilinii doar atunci când două molecule trec destul de aproape una de alta. În acest caz atracţia sau respingerea lor reciprocă le face să devieze la dreapta sau la stânga. E ceea ce se numeşte uneori un şoc. Dar acest cuvânt — *şoc* — nu trebuie înţeles în sensul lui obişnuit. Nu e necesar ca cele două molecule să vină în contact, e de-ajuns ca ele să se apropie într-atât una de alta pentru ca atracţiile lor reciproce să poată fi observate. Legile deviaţiei pe care ele o suferă sunt aceleaşi ca şi cum ar fi avut loc un şoc adevărat.

La început se pare că şocurile dezordonate ale acestei pulberi fără număr nu pot genera decât un haos inextricabil, în faţa căruia analiza trebuie să dea înapoi. Dar legea numerelor mari — acea lege supremă a hazardului — ne vine în ajutor. În faţa unei semi-dezordini ar trebui să disperăm, dar în dezordinea extremă această

lege statistică restabileşte un fel de ordine medie în faţa căreia spiritul poate redeveni stăpân pe sine. Teoria cinetică a gazelor este tocmai studiul acestei ordini medii. Ea ne arată că vitezele moleculelor sunt egal repartizate în toate direcţiile, că mărimea acestor viteze variază de la o moleculă la alta, dar că însăşi această variaţie se supune unei legi, zisă legea lui Maxwell. Această lege ne arată câte molecule au o viteză sau alta. Atunci când gazul se abate de la această lege, şocurile reciproce ale moleculelor, modificând mărimea şi direcţia vitezelor lor, tind să-l readucă la ea, fără întârziere. Fizicienii s-au străduit, nu fără succes, să explice în acest fel proprietăţile experimentale ale gazelor, de exemplu legea lui Mariotte.

Să considerăm acum Calea Lactee. Şi aici vedem pulbere fără număr, numai că particulele acestei pulberi nu mai sunt atomi, ci aştri ; aceste particule se mişcă de asemenea cu viteze mari ; ele acţionează la distanţă unele asupra altora, dar această acţiune este atât de slabă la mare distanţă, încât traiectoriile lor sunt rectilinii. Şi totuşi, din când în când, două dintre ele se pot apropia suficient de mult pentru a putea fi deviate de la traiectoria lor, ca o cometă care a trecut prea aproape de Jupiter. Într-un cuvânt, în ochii unui uriaş pentru care sorii noştri ar fi precum atomii la scara noastră, Calea Lactee nu i-ar părea decât o bulă de gaz.

Aceasta a fost ideea directoare a lordului Kelvin. Ce putem extrage din această comparaţie ? În ce măsură este ea exactă ? E ceea ce vom cerceta împreună. Dar înainte de a ajunge la o concluzie definitivă, şi nedorind s-o anticipăm, presimţim că teoria cinetică a gazelor este pentru astronom un model pe care n-ar trebui să-l urmeze orbeşte, dar din care s-ar putea inspira cu folos. Până în prezent, mecanica cerească nu s-a confruntat decât cu sistemul solar sau cu câteva sisteme de stele duble. În faţa puzderiei pe care o prezintă Calea Lactee sau roiul de stele sau nebuloasele resolubile, ea ar da înapoi, pentru că n-ar vedea aici decât haosul. Dar Calea Lactee nu e mai complicată decât un gaz. Metodele statistice bazate pe calculul probabilităţilor aplicabile gazului se pot aplica şi Căii Lactee. Contează, înainte de orice, să ne dăm seama de asemănarea celor două cazuri şi de diferenţa lor.

Lordul Kelvin s-a străduit să determine prin acest mijloc dimensiunile Căii Lactee. Ne limităm, în acest scop, să numărăm stelele care pot fi văzute cu telescoapele noastre. Dar nu suntem siguri că înapoia stelelor pe care le vedem nu există alte stele pe care nu le vedem. Încât, ceea ce am măsura în acest fel n-ar fi mărimea Căii Lactee, ci bătaia instrumentelor noastre. Noua teorie ne va oferi alte resurse. Într-adevăr, cunoaştem mişcările stelelor cele mai apropiate de noi şi ne putem face o idee despre mărimea şi direcţia vitezelor lor. Dacă ideile expuse mai sus sunt exacte, aceste viteze trebuie să urmeze legea lui Maxwell şi valoarea lor medie ne-ar face să cunoaştem, ca să zicem aşa, ceea ce corespunde temperaturii gazului nostru fictiv. Dar această temperatură depinde ea însăşi de dimensiunile bulei noastre de gaz. Cum se va comporta o masă gazoasă abandonată în vid, dacă elementele ei se atrag după legea lui Newton ? Ea va lua o formă sferică. În plus, datorită gravitaţiei, densitatea va fi mai mare în centru, presiunea va creşte şi ea de la suprafaţă la centru din cauza părţilor exterioare atrase spre centru : temperatura şi presiunea fiind legate prin intermediul legii zise adiabatice, aşa cum se întâmplă în straturile succesive ale atmosferei noastre. La suprafaţă presiunea va fi nulă, la fel şi temperatura absolută, adică viteza moleculelor.

Se pune aici o problemă. Vorbeam de legea adiabatică, dar această lege nu este aceeaşi pentru toate gazele, pentru că ea depinde de raportul dintre cele două călduri specifice ale lor. Pentru aer şi gazele asemănătoare acest raport este de 1,42. Ar fi însă potrivit să asimilăm Calea Lactee cu aerul ? Evident, nu. Ea ar trebui să fie privită ca un gaz monoatomic, ca vaporii de mercur, ca argonul, ca heliul, ceea ce înseamnă că raportul căldurilor specifice ar trebui să fie considerat egal cu 1,66. Într-adevăr, una din moleculele noastre ar fi, de exemplu, sistemul solar. Dar planetele sunt personaje foarte mici, singur soarele contează, aşa că molecula noastră este monoatomică. Şi dacă luăm chiar o stea dublă, este probabil că acţiunea unui astru străin care s-ar apropia de ea ar deveni suficientă pentru a devia mişcarea de translaţie generală a sistemului cu mult înainte de a fi capabilă să tulbure orbitele relative ale celor două componente. Într-un cuvânt, steaua dublă s-ar comporta ca un atom indivizibil.

Oricum, presiunea şi, în consecinţă, temperatura în centrul sferei gazoase ar fi cu atât mai mari cu cât sfera ar fi mai mare, pentru că presiunea creşte datorită greutăţii tuturor straturilor suprapuse. Putem presupune că noi ne aflăm aproape în centrul Căii Lactee. Observând viteza medie proprie a stelelor, am cunoaşte ceea ce corespunde temperaturii centrale a sferei noastre gazoase şi am determina raza acesteia.

Ne putem face o idee despre rezultat prin consideraţiile următoare. Să facem o ipoteză mai simplă : Calea Lactee este sferică şi masele sunt repartizate în ea în mod omogen. Rezultă de aici că aştrii descriu în ea elipse având acelaşi centru. Dacă presupunem că viteza se anulează la suprafaţă, putem calcula această viteză în centrul sferei prin ecuaţia forţelor vii. Rezultă astfel că această viteză este proporţională cu raza sferei, şi cu rădăcina pătrată a densităţii sale. Dacă masa sferei ar fi cea a Soarelui şi raza sa cea a orbitei terestre, viteza ar fi (e uşor de văzut) cea a Pământului pe orbita sa. Dar în cazul pe care l-am presupus, masa Soarelui ar trebui să fie distribuită într-o sferă cu o rază de 1 000 000 de ori mai mare, această rază fiind distanţa faţă de stelele cele mai apropiate ; densitatea este deci de 10^{18} ori mai mică ; or, vitezele sunt de acelaşi ordin, trebuie deci ca raza să fie de 10^{9} ori mai mare, cam 1 000 de ori distanţa faţă de stelele cele mai apropiate ; ar rezulta de aici aproximativ un miliard de stele în Calea Lactee.

Veţi spune însă că aceste ipoteze se îndepărtează mult de realitate. Mai întâi, Calea Lactee nu este sferică — vom reveni îndată asupra acestui punct — şi apoi teoria cinetică a gazelor nu este compatibilă cu ipoteza unei sfere omogene. Făcând însă calculul exact conform acestei teorii s-ar obţine fără îndoială un rezultat diferit, dar de acelaşi ordin de mărime ; or, într-o asemenea problemă datele sunt atât de nesigure, încât ordinul de mărime este singurul obiectiv pe care l-am putea urmări.

O primă remarcă se recomandă aici. Rezultatul lordului Kelvin pe care l-am regăsit printr-un calcul aproximativ concordă sensibil cu evaluările pe care le-au putut face observatorii cu telescoapele lor ; încât ar trebui să conchidem că suntem foarte aproape de a străpunge Calea Lactee. Dar acest lucru ne permite să rezolvăm o altă problemă. Există stelele pe care le vedem pentru că strălucesc.

N-ar putea exista însă aştri întunecaţi care ar circula în spaţiile interstelare şi a căror existenţă ar putea rămâne multă vreme necunoscută ? Dar atunci metoda lordului Kelvin ne-ar oferi numărul total al stelelor, inclusiv al celor întunecate. Cum cifra sa e comparabilă cu cea dată de telescop, înseamnă că nu există matérie întunecată sau cel puţin aceasta nu egalează materia strălucitoare.

Înainte de a merge mai departe, trebuie să considerăm problema sub un alt unghi. Este Calea Lactee astfel constituită imaginea unui gaz propriu-zis ? Se ştie că Crookes a introdus noţiunea unei a patra stări a materiei, în care gazele devenite prea rarefiate nu mai sunt adevărate gaze şi devin ceea ce se numeşte materie radiantă. Dată fiind densitatea sa mică, oare Calea Lactee este imaginea materiei gazoase sau cea a materiei radiante ? Răspunsul ne va fi oferit de luarea în considerare a ceea ce se numeşte *parcurs liber*.

Traiectoria unei molecule de gaz poate fi privită ca fiind formată din segmente rectilinii racordate prin arcuri foarte mici care corespund şocurilor succesive. Lungimea fiecărui segment este ceea ce se numeşte parcursul liber. Această lungime, se înţelege, nu este aceeaşi pentru toate segmentele şi pentru toate moleculele ; dar se poate lua o medie ; e ceea ce se numeşte *parcursul mediu*. Acesta este cu atât mai mare cu cât densitatea gazului este mai mică. Materia va fi radiantă dacă parcursul mediu este mai mare decât dimensiunile vasului în care este închis gazul, astfel că o moleculă poate parcurge întregul vas fără să sufere vreun şoc. În caz contrar, materia rămâne în stare gazoasă. Rezultă de aici că un acelaşi fluid poate fi radiant într-un vas mic şi gazos într-un vas mare. Poate tocmai de aceea, într-un tub Crookes, trebuie să realizăm un vid cu atât mai avansat cu cât tubul este mai mare.

Ce se întâmplă atunci în cazul Căii Lactee ? Avem de-a face cu o masă de gaz a cărei densitate este foarte mică, dar ale cărei dimensiuni sunt foarte mari. E oare posibil ca o stea să o străbată fără să sufere vreun şoc, adică fără să treacă atât de aproape de o altă stea încât să fie vizibil deviată de la traiectoria sa ? Ce înţelegem prin *atât de aproape* ? E, prin forţa lucrurilor, ceva puţin arbitrar. Să admitem că ar fi distanţa de la Soare la Neptun, ceea ce ar reprezenta o deviaţie de o zecime de grad. Să presupunem

deci că fiecare din stelele noastre e înfăşurată de o sferă de gardă având această rază. Ar putea trece o dreaptă între aceste sfere ? La distanţa medie de stelele Căii Lactee raza acestor sfere ar fi văzută sub un unghi de aproximativ o zecime de secundă. Şi avem un miliard de cercuri mici cu raza de o zecime de secundă. Avem noi şansa ca aceste cercuri să acopere de un mare număr de ori sfera cerească ? Departe de aşa ceva ; ele n-o vor acoperi decât a şaisprezecea miime parte. Astfel, Calea Lactee nu este imaginea materiei gazoase, ci aceea a materiei radiante a lui Crookes. Totuşi, întrucât concluziile noastre anterioare sunt din fericire prea puţin precise, nu trebuie să le modificăm sensibil.

Există însă o altă rezultantă : Calea Lactee nu e sferică, iar noi am raţionat până acum ca şi cum aşa ar fi, pentru că aceasta este forma de echilibru pe care ar avea-o un gaz izolat în spaţiu. Există, în schimb, roiuri de stele a căror formă este globulară şi cărora li s-ar aplica mai bine ceea ce am spus până acum. Herschel încercase deja să explice aparenţele lor remarcabile. El presupunea că stelele din roiuri sunt distribuite uniform, astfel ca un roi să fie o sferă omogenă. Fiecare stea ar descrie atunci o elipsă şi toate aceste orbite ar fi parcurse în acelaşi timp, încât la sfârşitul unei perioade roiul şi-ar regăsi configuraţia iniţială şi această configuraţie ar fi stabilă. Din nefericire, roiurile nu par omogene. Se observă o condensare la centru ; am observa-o chiar dacă sfera ar fi omogenă, pentru că ea este mai densă la centru ; dar ea n-ar fi tot atât de accentuată. Putem deci compara un roi mai degrabă cu un gaz în echilibru adiabatic şi care ia forma sferică pentru că aceasta este figura de echilibru a unei mase de gaz.

Dar, veţi spune, aceste roiuri sunt mult mai mici decât Calea Lactee, din care probabil chiar fac parte, şi, deşi sunt mai dense, ne-ar oferi mai curând ceva asemănător cu materia radiantă ; or, gazele nu-şi ating echilibrul adiabatic decât ca urmare a nenumăratelor şocuri ale moleculelor. Ar exista poate un mijloc de a pune la cale aşa ceva. Să presupunem că stelele roiului au suficientă energie pentru ca viteza lor să se anuleze atunci când ajung la suprafaţă ; ele ar putea atunci străbate roiul fără şoc, dar, odată ajunse la suprafaţă, ele ar reveni înapoi şi l-ar străbate din nou. După un mare număr de traversări, ele ar sfârşi prin a fi deviate de

un şoc. În aceste condiţii am avea încă o materie pe care am putea-o privi ca fiind gazoasă. Dacă din întâmplare au existat în roi stele a căror viteză ar fi mai mare, ele au ieşit de mult din roi, l-au părăsit pentru totdeauna. Pentru toate aceste motive ar fi ciudat să examinăm roiurile cunoscute, să încercăm să înţelegem legea densităţilor şi să vedem dacă aceasta este legea adiabatică a gazelor.

Să revenim însă la Calea Lactee. Ea nu e sferică ; am reprezenta-o mai curând ca un disc turtit. E clar atunci că o masă plecată fără viteză de la suprafaţă ar ajunge la centru cu viteze diferite, după cum va fi plecat de la suprafaţă din vecinătatea mijlocului discului sau din marginea discului ; viteza ar fi considerabil mai mare în ultimul caz.

Am admis însă, până acum, că vitezele proprii ale stelelor, cele pe care le observăm, trebuie să fie comparabile cu vitezele pe care le-ar atinge asemenea mase — ceea ce creează o anumită dificultate. Am dat mai sus o valoare pentru dimensiunile Căii Lactee şi am dedus-o din vitezele proprii observate care sunt de acelaşi ordin de mărime ca viteza Pământului pe orbită. Care este însă dimensiunea pe care am măsurat-o astfel ? Lăţimea ? Raza discului ? E, fără îndoială, ceva intermediar. Dar ce putem spune atunci despre lăţimea însăşi sau despre raza discului ? Dispunem de datele necesare pentru a face calculul. Mă limitez să vă fac să întrevedeţi posibilitatea de a întemeia o evaluare cel puţin aproximativă pe o discuţie aprofundată cu privire la mişcările proprii.

Ne găsim atunci în faţa a două ipoteze. Fie stelele din Calea Lactee au viteze care în majoritatea lor sunt paralele cu planul galactic, dar de altminteri distribuite uniform în toate sensurile paralel cu acest plan. În acest caz, observarea mişcărilor proprii trebuie să ne dezvăluie o preponderenţă a componentelor paralele cu Calea Lactee. Trebuie văzut, căci nu ştiu dacă din acest punct de vedere a avut loc o discuţie sistematică. Pe de altă parte, un asemenea echilibru n-ar putea fi decât provizoriu, căci, datorită şocurilor, moleculele — vreau să zic aştrii — vor dobândi cu timpul viteze mari în sensul perpendicular pe Calea Lactee şi în cele din urmă vor ieşi din planul său, încât sistemul va tinde spre forma sferică, singura figură de echilibru a unei mase gazoase izolate.

Fie sistemul întreg este antrenat într-o rotaţie comună şi tocmai de aceea este turtit ca Pământul, ca Jupiter, ca toate corpurile care se rotesc. Dat fiind însă că aplatizarea este considerabilă, trebuie ca rotaţia să fie rapidă. Rapidă, fără îndoială, dar trebuie să ne înţelegem asupra sensului acestui cuvânt. Densitatea Căii Lactee este de 10^{25} mai mică decât cea a Soarelui. O viteză de rotaţie care ar fi de $\sqrt{10^{25}}$ ori mai mică decât cea a Soarelui i-ar fi deci echivalentă din punctul de vedere al aplatizării. O viteză de 10^{12} mai lentă decât cea a Pământului, cam a treizecea parte dintr-o secundă de arc pe secol, ar fi o rotaţie foarte rapidă, aproape prea rapidă pentru ca echilibrul stabil să fie posibil.

În această ipoteză, mişcările proprii observabile ne-ar apărea uniform distribuite şi componentele paralele cu planul galactic n-ar mai avea preponderenţă. Ele nu ne-ar spune nimic despre rotaţia însăşi, pentru că noi facem parte din sistemul rotitor. Dacă nebuloasele spirale sunt ale Căii Lactee, străine de a noastră, ele nu sunt antrenate în această rotaţie şi am putea studia mişcările lor proprii. Ce-i drept, ele sunt foarte depărtate. Dacă o nebuloasă are dimensiunile Căii Lactee şi dacă raza ei aparentă este bunăoară de 20", distanţa sa este de 100 000 de ori raza Căii Lactee.

Dar asta n-are nici o importanţă, pentru că noi cerem de la ele informaţii cu privire nu la translaţia sistemului nostru, ci la rotaţia sa. Prin mişcarea lor aparentă stelele fixe ne dezvăluie rotaţia diurnă a Pământului, deşi distanţa lor este uriaşă. Din nefericire, rotaţia posibilă a Căii Lactee, oricât de rapidă ar fi ea în mod relativ, este foarte lentă din punct de vedere absolut, şi de altminteri vizările nebuloaselor nu pot fi foarte precise. Ne-ar trebui deci mii de ani de observaţii ca să aflăm ceva.

Oricum, în această a doua ipoteză, figura Căii Lactee ar fi una de echilibru definitiv.

N-o să insist asupra valorii relative a acestor două ipoteze, pentru că există o a treia, care este poate mai verosimilă. Se ştie că printre nebuloasele neresolubile se pot distinge mai multe familii : nebuloasele neregulate, cum ar fi cea din Orion, nebuloasele planetare şi anulare, nebuloasele spirale. Spectrele primelor două familii au fost determinate, ele sunt discontinue ; de altfel, distribuţia lor pe cer pare a depinde de Calea Lactee ; fie că tind să se

îndepărteze, fie că tind să se apropie de ea, ele fac deci parte din sistem. Dimpotrivă, nebuloasele spirale sunt îndeobşte considerate ca independente de Calea Lactee ; se admite că ele sunt formate, ca şi aceasta, dintr-o multitudine de stele, că sunt, într-un cuvânt, alte Căi Lactee foarte depărtate de a noastră. Lucrările recente ale lui Stratonoff tind să ne facă să privim însăşi Calea Lactee ca o nebuloasă spirală. Tocmai aceasta este cea de-a treia ipoteză despre care doream să vă vorbesc.

Cum să explicăm aparenţele atât de neobişnuite prezentate de nebuloasele spirale şi care sunt prea regulate şi prea constante ca să se datoreze hazardului ? În primul rând, e de-ajuns să aruncăm privirea pe una din aceste imagini pentru a vedea că masa este în rotaţie. Putem vedea chiar care este sensul rotaţiei. Toate razele spirale sunt curbate în acelaşi sens. Este evident că tocmai *aripa care se mişcă* rămâne în urmă faţă de *pivot*, şi asta determină sensul rotaţiei. Dar nu numai atât. E clar că aceste nebuloase nu pot fi asimilate unui gaz în repaus, nici chiar unui gaz aflat în echilibru relativ sub influenţa unei rotaţii uniforme. Trebuie să le comparăm cu un gaz în mişcare permanentă în care domină curenţi interni.

Să presupunem, de exemplu, că rotaţia nucleului central este rapidă (ştiţi ce înţeleg eu prin acest cuvânt), prea rapidă pentru echilibrul stabil ; atunci la ecuator forţa centrifugă ar învinge atracţia şi stelele ar tinde să se elibereze la ecuator şi ar forma curenţi divergenţi ; îndepărtându-se însă, cum mişcarea lor de rotaţie rămâne constantă şi cum raza vectoare creşte, viteza lor unghiulară ş-ar micşora şi tocmai de aceea aripa care se mişcă ar părea rămasă în urmă.

Din acest punct de vedere n-ar exista o adevărată mişcare permanentă, nucleul central ar pierde constant materie — aceasta s-ar desprinde de el pentru a nu mai reveni — şi s-ar vida progresiv. Dar putem să modificăm ipoteza. Pe măsură ce se îndepărtează, steaua îşi pierde viteza şi în cele din urmă se opreşte. În acel moment atracţia îşi exercită iarăşi acţiunea asupra ei şi o readuce spre nucleu. Ar exista deci curenţi centripeţi. Trebuie să admitem că aceştia sunt în rândul întâi, iar curenţii centrifugi în rândul al doilea, dacă reluăm comparaţia cu o trupă aflată în luptă care exe-

cută o întoarcere a frontului. E necesar, într-adevăr, ca forţa centrifugă compusă să fie compensată de atracţia exercitată de straturile centrale ale roiului asupra straturilor extreme.

De altminteri, după un anumit interval de timp, se stabileşte un regim permanent. După ce roiul s-a curbat, atracţia exercitată asupra pivotului de aripa care se mişcă tinde să încetinească pivotul şi atracţia pivotului asupra acestei aripi tinde să-i accelereze mersul care nu-i mai măreşte întârzierea, încât în cele din urmă toate razele se rotesc cu o viteză uniformă. Se poate admite totuşi că rotaţia nucleului este mai rapidă decât cea a razelor.

Rămâne o problemă. De ce aceste roiuri centripete şi centrifuge tind să se concentreze în raze în loc să se împrăştie puţin peste tot ? De ce aceste raze se repartizează în mod regulat ? Roiurile se concentrează datorită atracţiei exercitate de roiurile deja existente asupra stelelor care ies din nucleu în vecinătatea lor. Din momentul în care s-a produs o inegalitate, ea tinde să se accentueze din această cauză.

De ce razele se repartizează în mod regulat ? E un lucru mai delicat. Să presupunem că nu există rotaţie, că toţi aştrii se află în două planuri dreptunghiulare astfel ca distribuţia lor să fie simetrică în raport cu cele două planuri. Datorită simetriei, n-ar exista motive ca ei să iasă din aceste planuri, nici ca simetria să se altereze. Această configuraţie ne-ar da deci echilibrul, dar *un echilibru instabil.*

Dacă, dimpotrivă, există rotaţie, am găsi o configuraţie de echilibru analoagă cu patru raze curbe, egale între ele şi care se taie la 90° ; dacă rotaţia este destul de rapidă, echilibrul ar putea fi stabil.

Nu sunt în stare să precizez mai mult : mă mulţumesc cu faptul de a vă face să întrevedeţi că aceste forme spirale ar putea probabil să fie explicate cândva nefăcând să intervină decât legea gravitaţiei şi consideraţii statistice care le reamintesc pe cele din teoria gazelor.

Ceea ce spuneam despre curenţii interni vă arată că n-ar fi lipsit de interes să discutăm în mod sistematic ansamblul mişcărilor proprii. Acest lucru s-ar putea face peste o sută de ani, când se va elabora a doua ediţie a Hărţii cerului şi o vom compara cu prima, aceea pe care o întocmim noi acum.

Aş dori însă, ca să închei, să vă atrag atenţia asupra unei probleme — cea a vârstei Căii Lactee sau a nebuloaselor. Dacă ceea ce am crezut că vedem s-ar confirma, ne-am putea face o idee. Genul de echilibru statistic al cărui model ne este oferit de gaze nu se poate stabili decât în urma unui mare număr de şocuri. Dacă aceste şocuri sunt rare, el nu s-ar putea produce decât după un timp foarte lung. Dacă realmente Calea Lactee (sau cel puţin roiurile care fac parte din ea), dacă nebuloasele au atins acest echilibru, înseamnă că ele sunt foarte bătrâne, şi am avea o limită inferioară a vârstei lor. Am avea şi o limită superioară ; acest echilibru nu este definitiv şi nu poate dura de-a pururi. Nebuloasele noastre spirale ar fi asimilabile unor gaze antrenate de mişcări permanente. Dar gazele în mişcare sunt vâscoase şi vitezele lor slăbesc cu timpul. Ceea ce corespunde aici vâscozităţii (şi care depinde de probabilităţile de şoc ale moleculelor) este excesiv de slab, astfel încât regimul actual ar putea persista un timp extrem de lung, totuşi nu de-a pururi, încât Căile noastre Lactee n-ar putea să trăiască veşnic, nici să devină infinit de bătrâne.

Asta nu-i totul. Să considerăm atmosfera noastră : la suprafaţă trebuie să domine o temperatură infinit de mică şi viteza moleculelor este aici aproape de zero. Dar nu este vorba decât de viteza medie ; ca urmare a şocurilor, una dintre aceste molecule ar putea dobândi (rar, e adevărat) o viteză uriaşă, şi atunci ea va ieşi din atmosferă şi, odată ieşită, nu va mai reveni. Atmosfera se goleşte deci cu o încetineală extremă. Calea Lactee va pierde din când în când o stea prin acelaşi mecanism, ceea ce îi limitează deopotrivă durata.

Ei bine, e sigur că dacă am calcula în acest fel vârsta Căii Lactee, am obţine numere uriaşe. Dar aici apare o dificultate. Bazându-se pe alte consideraţii, unii fizicieni estimează că Sorii nu pot avea decât o existenţă efemeră, aproximativ cincizeci de milioane de ani ; valoarea limitei noastre inferioare ar fi mult mai mare decât aceasta. Trebuie să credem că evoluţia Căii Lactee a început atunci când materia era încă obscură ? Cum ar fi ajuns însă toate stelele care o compun la vârsta adultă în acelaşi timp, vârstă care trebuie să dureze atât de puţin ? Ori trebuie să ajungă toate la această vârstă în mod succesiv şi stelele pe care le vedem nu con-

stituie decât o minoritate infimă în raport cu cele care s-au stins sau care se vor aprinde cândva ? Dar cum să conciliem acest lucru cu ceea ce spuneam mai sus despre absenţa materiei obscure într-o proporţie importantă ? Ar trebui să abandonăm una dintre cele două ipoteze, dar pe care anume? Mă limitez să pun în evidenţă dificultatea fără pretenţia de a o rezolva. Voi încheia deci cu un mare semn de întrebare. De aceea este interesant să punem probleme, chiar atunci când rezolvarea lor pare foarte îndepărtată.

CAPITOLUL II

Geodezia franceză

Toată lumea înţelege interesul nostru de a cunoaşte forma şi dimensiunile Pământului. Dar unii s-ar mira poate de precizia urmărită. E un lux inutil ? La ce folosesc eforturile pe care le cheltuiesc în acest scop geodezii ?

Dacă am pune această întrebare unui parlamentar, îmi închipui că ar răspunde : „Sunt înclinat să cred că geodezia este una dintre ştiinţele cele mai folositoare, pentru că face parte din categoria acelora care ne costă cel mai scump". Aş încerca să vă dau un răspuns ceva mai precis.

Marile lucrări publice — pe timp de pace ca şi pe timp de război — nu pot fi întreprinse fără studii îndelungate care ne scutesc de multe tatonări, greşeli şi cheltuieli inutile. Aceste studii nu se pot face decât pe o hartă bună. Dar o hartă ar fi doar o fantezie lipsită de orice valoare dacă am vrea s-o întocmim fără să ne bazăm pe o osatură solidă. E ca şi cum ai vrea să ţii în picioare un corp omenesc din care ar fi fost retras scheletul.

Or, această osatură ne este oferită de măsurătorile geodezice ; aşadar, fără geodezie nu există o hartă bună şi, fără aceasta, nu există mari lucrări publice.

Fără îndoială, aceste motive ar fi suficiente pentru a justifica multe cheltuieli. Dar acestea nu sunt motive potrivite pentru a-i convinge pe oamenii practici. Nu asupra lor se cuvine să insistăm aici. Există motive mai înalte şi, în definitiv, mai importante.

Vom pune deci întrebarea altfel : ne poate ajuta geodezia să cunoaştem mai bine natura ? Ne face ea să înţelegem unitatea şi armonia naturii ? Un fapt izolat este de mică însemnătate şi cuceririle ştiinţei nu au valoare decât dacă pregătesc noi cuceriri.

Dacă deci am descoperi la un moment dat o mică ridicătură pe elipsoida terestră, prin ea însăşi această descoperire n-ar prezenta un mare interes. Ea ar deveni valoroasă dacă, dimpotrivă, cercetând cauza acestei ridicături, sperăm să pătrundem noi secrete.

Ei bine, când Maupertuis şi La Condamine au înfruntat, în secolul al XVIII-lea, climate atât de diferite, n-au făcut-o doar pentru a cunoaşte forma planetei noastre, era vorba de sistemul Lumii întregi.

Dacă Pământul era turtit, Newton învingea odată cu el, şi teoria gravitaţiei şi întreaga mecanică cerească modernă.

Şi azi, un secol şi jumătate după victoria newtoniană, se crede că geodezia nu mai are nimic să ne înveţe ?

Nu ştim ce se află în interiorul globului. Puţurile de mină şi sondajele ne-au ajutat să cunoaştem un strat de 1 sau 2 kilometri grosime, adică a mia parte din masa totală. Dar ce se află dedesubt ?

Dintre toate călătoriile extraordinare visate de Jules Verne, poate tocmai călătoria în centrul Pământului ne-a condus în regiunile cele mai neexplorate.

Dar aceste roci adânci, pe care nu le putem atinge, îşi exercită la distanţă atracţia care acţionează asupra pendulului şi deformează sferoidul terestru. Geodezia poate deci să le cântărească de la distanţă, ca să zicem aşa, şi să ne informeze asupra repartiţiei lor. Ea ne-ar face astfel să vedem realmente acele regiuni misterioase pe care Jules Vernes ni le arăta doar în imaginaţie.

Acesta nu este un vis găunos. Comparând toate măsurătorile, Faye a ajuns la un rezultat surprinzător. Sub oceane există în adâncuri roci de o foarte mare densitate ; sub continente, există goluri.

Noi observaţii vor modifica poate aceste concluzii în detalii.

Veneratul nostru decan ne-a arătat, în toate cazurile, unde trebuie să cercetăm şi ce-i poate spune geodezul geologului, curios să cunoască structura internă a Pământului, şi chiar gânditorului care vrea să speculeze asupra trecutului şi originii acestei planete.

De ce am intitulat acest capitol *Geodezia franceză* ? Pentru că în fiecare ţară, această ştiinţă a dobândit, poate mai uşor decât toate celelalte, un caracter naţional. E uşor să ne dăm seama de motivul acestei situaţii.

Este necesar să existe rivalităţi. Rivalităţile ştiinţifice sunt totdeauna, sau măcar aproape totdeauna, oneste ; în orice caz ele sunt necesare, pentru că sunt totdeauna rodnice.

Ei bine, în aceste întreprinderi care cer eforturi atât de îndelungate şi colaboratori atât de numeroşi, individul, fără voia lui, trece neobservat. Nimeni nu are dreptul să spună : asta este opera mea. Aşadar rivalităţile se exercită nu între oameni, ci între naţiuni.

Suntem conduşi astfel să cercetăm care a fost contribuţia Franţei. Cred că avem dreptul să ne mândrim cu ea.

La sfârşitul secolului al XVIII-lea s-au angajat lungi dispute între newtonienii care credeau că Pământul este turtit, aşa cum o cere teoria gravitaţiei, şi Cassini, care, înşelat de măsurători inexacte, credea că globul nostru este alungit. Numai observaţia directă putea tranşa chestiunea. Academia noastră de ştiinţe a fost cea care a întreprins această muncă uriaşă pentru acea epocă.

În timp ce Maupertuis şi Clairaut măsurau un grad de meridian sub cercul polar, Bouguer şi Condamine se îndreptau spre ansamblul montan andin, în regiuni supuse pe atunci Spaniei şi care formează azi Republica Ecuador. Misionarii noştri se expuneau unor eforturi considerabile. Călătoriile nu erau atât de uşoare ca azi.

Desigur, ţara unde acţiona Maupertuis nu era un deşert. Se spune că chiar a gustat, printre laponi, dulci satisfacţii sufleteşti pe care adevăraţii navigatori arctici nu le cunoşteau. Era cu aproximaţie regiunea unde, în zilele noastre, confortabile nave cu aburi transportă, în fiecare vară, caravane de turişti şi de tineri englezi. Pe atunci însă nu exista agenţia Cook, şi Maupertuis credea în mod serios că a făcut o expediţie polară.

Poate nu se înşelase cu totul. Ruşii şi suedezii continuă azi măsurători asemănătoare la Spitzberg, într-o regiune unde există adevărate banchize. Dar ei au cu totul alte resurse şi diferenţa de timp o compensează pe cea de latitudine.

Numele lui Maupertuis ne-a parvenit zdravăn julit de ghearele doctorului Akakia. Savantul avusese nefericirea de a-i displace lui Voltaire, care era pe atunci regele spiritului. La început el a fost lăudat peste măsură de către Voltaire. Dar laudele regilor sunt la fel de redutabile ca şi dizgraţia lor, căci zilele următoare le sunt teribile. Voltaire însuşi a ştiut ceva în această privinţă.

Voltaire l-a numit pe Maupertuis bunul meu maestru de gândire, marchiz al cercului polar, drag aplatizator al lumii şi al lui Cassini, şi chiar, laudă supremă, sir Isaac Maupertuis. El i-a scris : „Doar pe regele Prusiei îl pun la acelaşi nivel cu dumneavoastră ; nu-i lipseşte decât faptul de a fi geometru". Îndată însă scena se schimbă, nu mai e vorba de a-l diviniza, precum altădată argonauţii, sau de a face să coboare din Olimp sfatul zeilor pentru a-i contempla lucrările, ci de a-l închide într-un azil de nebuni. Nu mai vorbeşte de spiritul său sublim, ci de orgoliul său despotic, dublat de foarte puţină ştiinţă şi de mult ridicol.

Nu vreau să povestesc aceste lupte eroicomice. Îngăduiţi-mi totuşi câteva reflecţii asupra a două versuri scrise de Voltaire. În *Discurs asupra moderaţiei* (nu e vorba de moderaţie în elogii şi critici), poetul spune :

Aţi confirmat în zonă mult neprietenoasă
Ce cunoscuse Newton fără-a ieşi din casă.

Aceste două versuri (care înlocuiesc laudele hiperbolice de la început) sunt foarte nedrepte şi, fără îndoială, Voltaire era prea luminat ca să n-o înţeleagă.

Nu erau preţuite pe atunci decât descoperirile care puteau fi făcute fără să ieşi din casă.

Azi s-ar face puţin caz mai curând de teorie, ceea ce înseamnă să nesocoteşti scopul ştiinţei.

Natura e guvernată de capriciu sau armonia o stăpâneşte ? Aceasta este întrebarea. Tocmai atunci când ne dezvăluie această armonie ştiinţa este frumoasă şi deci demnă de a fi cultivată. Dar de unde poate veni această dezvăluire dacă nu din acordul unei teorii cu experienţa ? Scopul nostru este deci să cercetăm dacă acest acord are loc sau lipseşte. În consecinţă, cei doi termeni pe care trebuie să-i comparăm între ei sunt la fel de indispensabili. A-l neglija pe unul pentru celălalt ar fi un nonsens. Izolate una de alta, teoria ar fi vidă, experienţa ar fi mioapă. Amândouă ar fi inutile şi lipsite de interes.

Maupertuis are deci dreptul la partea lui de glorie. Fără îndoială, ea n-o egalează pe cea a lui Newton, care primise scânteia

divină ; nici măcar pe cea a colaboratorului său Clairaut. Ea nu e totuşi de neglijat, pentru că opera sa era necesară, şi dacă Franţa, devansată de Anglia în secolul al XVII-lea, şi-a luat revanşa în secolul următor, o datorează nu doar geniului unor Clairaut, d'Alembert, Laplace, ci şi stăruinţei îndelungate a unor Maupertuis şi Condamine.

Ajungem la ceea ce s-ar putea numi a doua perioadă eroică a geodeziei. Franţa era sfâşiată în interior. Întreaga Europă se înarmează împotriva ei. Se părea că aceste lupte de proporţii gigantice trebuia să-i absoarbă toate forţele. Departe de aşa ceva, îi mai rămâneau şi pentru a servi ştiinţa. Oamenii din acel timp nu dădeau înapoi în faţa nici unei întreprinderi, erau oameni de bună-credinţă.

Delambre şi Méchain au primit misiunea de a măsura un arc ce se întinde de la Dunkerque la Barcelona. De data asta nu se mai merge în Laponia sau în Peru ; escadrele inamice ne-ar fi barat drumurile. Dar, dacă expediţiile sunt mai puţin depărtate, epoca este atât de agitată încât obstacolele, pericolele chiar sunt la fel de mari.

În Franţa, Delambre avea de luptat cu rea-voinţa municipalităţilor bănuitoare. După cum se ştie, clopotniţele care se văd de la mare distanţă şi care pot fi ţintite cu precizie, servesc adeseori de semnale geodezilor. Dar în ţara pe care o traversa Delambre nu mai existau clopotniţe. Nu mai ştiu care proconsul trecuse pe acolo şi se lăuda că a făcut să cadă toate clopotniţele care se înălţau trufaş deasupra locuinţei umile a *sans-culottes*-ilor.

S-au înălţat atunci piramide de planşe acoperite cu pânză albă pentru a le face mai vizibile. Era altceva : pânză albă ! Ce temerar ar îndrăzni să arboreze pe vârfurile noastre recent eliberate stindardul odios al contrarevoluţiei ? Au fost obligaţi să bordeze pânza albă cu banderole albastre şi roşii.

Méchain opera în Spania ; dificultăţile erau diferite, dar nu mai mici. Ţăranii spanioli erau ostili. Acolo nu lipseau clopotniţele : nu era însă un sacrilegiu să te instalezi în ele cu instrumente misterioase şi poate diabolice ? Revoluţionarii erau aliaţii Spaniei, dar aliaţi care erau bănuiţi puţin de erezie.

„Suntem tot timpul ameninţaţi, scrie Méchain, că vin să ne măcelărească". Din fericire, graţie exortaţiilor parohilor, scrisorilor pastorale ale episcopilor, aceşti spanioli sălbatici se mulţumeau cu ameninţarea.

Câţiva ani mai târziu Méchain a făcut a doua expediţie în Spania. El îşi propunea să prelungească meridianul din Barcelona până la arhipelagul Baleares. Era pentru prima dată că se încerca trecerea triangulaţiilor peste un braţ întins al mării observând semnalele instalate pe un munte înalt dintr-o insulă îndepărtată. Acţiunea era bine concepută şi bine pregătită. Ea a eşuat totuşi. Savantul francez a relatat despre dificultăţile de tot felul, de care se plânge cu amărăciune în corespondenţa sa. „Infernul — scrie el, poate exagerând puţin —, infernul şi toate urgiile pe care le revarsă pe pământ, furtunile, războiul, ciuma şi intrigile murdare s-au dezlănţuit împotriva mea !"

Fapt e că a întâlnit la colaboratorii săi mai mult încăpăţânare orgolioasă decât bunăvoinţă şi că mii de incidente i-au frânat munca. Ciuma nu era nimic, mult mai redutabilă era teama de ciumă. Toate aceste insule erau neîncrezătoare în insulele vecine şi se temeau că le transmit calamitatea. Doar după mai multe săptămâni Méchain a primit permisiunea de a debarca, dar cu condiţia de a-şi asezona cu oţet toate hârtiile ; asta era antisepsia de atunci.

Dezgustat şi bolnav, şi-a cerut rechemarea pe patul de moarte.

Arago şi Biot au avut cinstea de a continua o operă neîncheiată şi de a o duce la bun sfârşit.

Graţie sprijinului acordat de guvernul spaniol, protecţiei mai multor episcopi şi mai ales protecţiei unei vestite căpetenii de tâlhari, operaţiile au înaintat destul de repede. Din fericire ele s-au încheiat şi Biot s-a întors în Franţa tocmai când izbucnea ciuma.

Era momentul în care întreaga Spanie punea mâna pe arme pentru a-şi apăra, împotriva noastră, independenţa. De ce urca acest străin pe munţi ca să emită semnale ? Evident, pentru a chema armata franceză. Arago nu a putut scăpa de plebe decât căzând prizonier. În închisoare el nu avea altă distracţie decât să citească în ziarele spaniole descrierea propriei sale execuţii. Ziarele din acea vreme dădeau uneori ştiri pripite. El a avut cel puţin consolarea să afle că murise curajos şi creştineşte.

Nici închisoarea nu era mai sigură ; a trebuit să evadeze şi să vină în Alger. Aici s-a îmbarcat cu destinaţia Marsilia pe un vas

algerian. Vasul este capturat de un pirat spaniol şi iată-l pe Arago readus în Spania şi târât în temniţă printre nemernici şi în cea mai groaznică mizerie.

Dacă n-ar fi fost vorba decât de supuşii şi de oaspeţii săi, beiul n-ar fi avut nimic de zis. Se aflau însă la bord şi doi lei, cadou pe care suveranul african îl trimitea lui Napoleon. Beiul a ameninţat cu războiul.

Nava şi prizonierii au fost lăsaţi în libertate. Determinarea pe hartă a poziţiei vasului ar fi trebuit să fie făcută corect, pentru că exista un astronom la bord. Dar astronomul suferea de rău de mare şi marinarii algerieni, care vroiau să ajungă la Marsilia, au acostat la Bougie. De aici Arago s-a întors în Alger, străbătând pe jos Kabylia în mijlocul a numeroase primejdii. Multă vreme a fost reţinut în Africa şi ameninţat cu ocna. În cele din urmă a putut reveni în Franţa. Observaţiile sale, pe care le păstrase sub cămaşă, şi, ceea ce este cu totul extraordinar, instrumentele sale au trecut cu bine prin aceste aventuri teribile.

Până acum Franţa nu numai că a ocupat primul loc, dar a deţinut scena aproape singură. În anii care au urmat nu am rămas inactivi ; harta noastră de stat major constituie un model. Totuşi metodele noi de observaţie şi de calcul ne-au venit mai ales din Germania şi Anglia. Doar după vreo patruzeci de ani Franţa şi-a redobândit rangul.

Ea o datorează unui savant ofiţer, generalul Perrier, care a executat cu succes o acţiune cu adevărat îndrăzneaţă, joncţiunea între Spania şi Africa. Au fost instalate staţii pe patru piscuri, pe cele două ţărmuri ale Mediteranei. Luni de-a rândul s-a aşteptat o atmosferă liniştită şi limpede. În cele din urmă s-a observat acel fir subţire de lumină care parcursese 300 de kilometri deasupra mărilor. Operaţia a reuşit.

Acum au fost concepute proiecte şi mai îndrăzneţe. De pe un munte aproape de Nisa se vor vedea semnale şi în Corsica, dar de data asta nu în scopul unor determinări geodezice, ci pentru a măsura viteza luminii. Distanţa e de numai 200 de kilometri ; dar raza luminoasă va trebui să călătorească dus-întors după ce se va fi reflectat pe o oglindă situată în Corsica. Şi n-ar trebui să se rătăcească pe drum întrucât ea trebuie să revină exact în punctul de plecare.

De atunci, activitatea geodezică franceză nu şi-a încetinit ritmul. Nu mai avem de povestit aventuri aşa de uluitoare ; dar opera ştiinţifică realizată este uriaşă. Teritoriul Franţei de peste mare, ca şi cel al metropolei se acoperă de triunghiuri măsurate cu precizie.

Munca a devenit din ce în ce mai exigentă şi ceea ce admirau părinţii noştri nu ne mai satisface azi. Dar, pe măsură ce se caută mai multă exactitate, dificultăţile sporesc considerabil. Suntem înconjuraţi de capcane şi avem de înfruntat numeroase cauze de eroare nebănuite. Trebuie deci să creăm instrumente tot mai bune.

Nici în această privinţă Franţa nu s-a lăsat întrecută. Aparatele noastre de măsurare a bazelor şi a unghiurilor nu lasă nimic de dorit. Aş cita şi pendulul colonelului Defforges, care permite determinarea gravitaţiei cu o precizie necunoscută până acum.

Viitorul geodeziei franceze se află actualmente în mâinile Serviciului geografic al armatei, condus succesiv de generalul Bassot şi generalul Berthaut. Şi merită din plin să ne felicităm pentru acest lucru. Ca să faci geodezie nu sunt suficiente aptitudinile ştiinţifice. Trebuie să fii capabil să suporţi oboseli îndelungate sub toate climatele. Trebuie ca şeful să ştie să obţină supunerea colaboratorilor săi şi s-o impună auxiliarilor săi indigeni. Acestea sunt calităţi militare. De altminteri, se ştie că în armata noastră ştiinţa şi curajul s-au însoţit întotdeauna.

Adaug că o organizare militară asigură unitatea de acţiune indispensabilă. Ar fi mai greu de conciliat pretenţiile rivale ale unor savanţi care ţin la independenţa lor, preocupaţi de ceea ce numesc ei gloria şi care ar trebui totuşi să colaboreze, deşi separaţi de distanţe mari. Între geodezii de altădată au existat adeseori dispute, unele răsunătoare. Timp îndelungat Academia s-a făcut ecoul disputei dintre Bouguer şi La Condamine. Nu vreau să spun că militarii sunt lipsiţi de pasiuni, dar disciplina impune tăcerea amorului propriu prea accentuat.

Mai multe guverne străine au apelat la ofiţerii noştri ca să le organizeze serviciul geodezic : dovadă că influenţa ştiinţifică a Franţei în străinătate nu a slăbit.

Inginerii noştri hidrografi aduc şi ei la opera comună un contingent reputat. Ridicarea ţărmurilor noastre, a coloniilor noastre,

studiul mareelor le oferă un vast câmp de cercetări. Aş cita şi nivelmentul general al Franţei care se execută prin metodele ingenioase şi precise ale lui Lallemand.

Cu asemenea oameni, suntem siguri de viitor. De altminteri, nu vor duce lipsă de lucru ; imperiul nostru colonial le deschide imense spaţii prost explorate. Asta nu-i totul : Asociaţia geodezică internaţională a recunoscut necesitatea unei noi măsurări a arcului din Quito, determinat odinioară de La Condamine. Franţa a primit această misiune. Ea avea în această privinţă toate drepturile, pentru că strămoşii noştri realizaseră, ca să ne exprimăm aşa, cucerirea ştiinţifică a Cordilierilor. De altfel, aceste drepturi nu au fost contestate şi guvernul nostru a ţinut să le exercite.

Căpitanii Maurain şi Lacombe au făcut o primă recunoaştere, şi rapiditatea cu care şi-au îndeplinit misiunea, traversând regiuni dificile şi căţărându-se pe piscurile cele mai abrupte, merită toate laudele. Ea a stârnit admiraţia generalului Alfaro, preşedintele Republicii Ecuador, care i-a supranumit „los hombres de hierro" — bărbaţii de fier.

Misiunea definitivă a trecut apoi sub comanda locotenent-colonelului (pe atunci comandant) Bourgeois. Rezultatele obţinute au îndreptăţit speranţele investite. Dar ofiţerii noştri au înfruntat dificultăţi neprevăzute din cauza climei. De mai multe ori, unul dintre ei a trebuit să rămână luni de-a rândul la înălţimea de 4 000 de metri, în nori şi zăpadă, fără să observe nimic din semnalele pe care le avea de vizat şi care refuzau să se arate. Dar, graţie perseverenţei şi curajului lor, aceste condiţii au determinat doar o întârziere şi o creştere a cheltuielilor, fără ca exactitatea măsurătorilor să fi avut de suferit.

Concluzii generale

Am încercat să explic, în paginile precedente, cum trebuie să procedeze savantul ca să aleagă între nenumăratele fapte care se oferă curiozităţii sale, pentru că şi infirmitatea naturală a minţii sale îl obligă să facă o alegere, deşi o alegere este totdeauna un sacrificiu. Am explicat-o mai întâi prin consideraţii generale, reamintind, pe de o parte, natura problemei de rezolvat şi, pe de altă parte, încercând să înţelegem mai bine natura minţii omeneşti, care este principalul instrument al rezolvării sale. Am explicat-o apoi prin două exemple ; nu le-am înmulţit la infinit. A trebuit, la rândul meu, să fac o alegere şi am ales în mod natural problemele pe care le studiasem cel mai mult. Alţii ar fi făcut, fără îndoială, o alegere diferită ; puţin contează însă, căci cred că ar fi ajuns şi ei la aceleaşi concluzii.

Există o ierarhie a faptelor ; unele sunt fără însemnătate, nu ne spun nimic dincolo de ele. Savantul care le-a constatat n-a învăţat nimic mai mult decât un fapt şi n-a devenit mai capabil să prevadă fapte noi. Aceste fapte, se pare, se produc o dată şi nu sunt destinate să se reînnoiască.

Există, pe de altă parte, fapte de mare randament, fiecare dintre ele învăţându-ne o lege nouă. Şi pentru că este nevoit să facă o alegere, savantul trebuie să se ataşeze tocmai de acestea.

Fără îndoială, această clasificare este relativă şi depinde de slăbiciunea minţii noastre. Faptele de mic randament sunt faptele complexe, asupra cărora împrejurări multiple pot exercita o influenţă sensibilă — împrejurări prea numeroase şi prea diverse pentru a le putea discerne pe toate. Dar ar trebui să spun mai curând că acestea sunt faptele pe care noi le considerăm complexe, pentru că

întrepătrunderea împrejurărilor depăşeşte puterea minţii noastre. Fără îndoială, o minte mai cuprinzătoare şi mai fină decât a noastră ar judeca despre ele în mod diferit. Dar puţin contează ; nu de această minte superioară ne putem noi folosi, ci de a noastră.

Faptele de mare randament sunt cele pe care le considerăm simple ; fie că sunt realmente simple, pentru că nu sunt influenţate decât de un număr mic de împrejurări bine definite, fie că iau o aparenţă de simplitate, pentru că împrejurările multiple de care depind se supun legilor hazardului şi ajung astfel să se compenseze reciproc. Şi acesta este cazul care se întâmplă cel mai frecvent. E ceea ce ne-a obligat să examinăm ceva mai îndeaproape noţiunea de hazard. Faptele în domeniul cărora se aplică legile hazardului devin accesibile savantului, care s-ar descuraja în faţa caracterului extraordinar de complicat al problemelor la care aceste legi nu sunt aplicabile.

Am văzut că aceste consideraţii se aplică nu doar ştiinţelor fizice, ci şi celor matematice. Metoda de demonstraţie nu este aceeaşi pentru fizician şi pentru matematician. Dar metodele de invenţie seamănă mult între ele. Şi într-un caz şi în celălalt ele constau în demersul de a urca de la fapt la lege şi de a căuta faptele susceptibile de a conduce la o lege.

Pentru a pune în evidenţă acest aspect, am prezentat activitatea minţii matematicianului sub trei forme : mintea matematicianului inventator şi creator ; cea a geometrului inconştient, care, la strămoşii noştri îndepărtaţi sau în anii ceţoşi ai copilăriei noastre, a construit noţiunea noastră instinctivă de spaţiu ; cea a adolescentului, căruia profesorii din învăţământul secundar îi dezvăluie primele principii ale ştiinţei şi încearcă să facă înţelese definiţiile fundamentale. Am văzut pretutindeni rolul intuiţiei şi al spiritului de generalizare în lipsa căruia aceste trei etaje de matematicieni, dacă mi se îngăduie să mă exprim aşa, ar fi reduse la o egală neputinţă.

Nici în demonstraţie logica nu este totul. Adevăratul raţionament matematic este o veritabilă inducţie, diferită în multe privinţe de inducţia fizică, dar procedând ca şi aceasta, de la particular la general. Toate eforturile care au fost făcute pentru a răsturna această ordine şi a reduce inducţia matematică la regulile logicii n-au ajuns decât la insuccese, rău disimulate de întrebuinţarea unui limbaj inaccesibil profanului.

Exemplele luate din ştiinţele fizice ne-au arătat cazuri foarte diferite de fapte de mare randament. O experienţă a lui Kaufmann asupra radiaţiilor radiului revoluţionează în acelaşi timp mecanica, optica şi astronomia. De ce ? Pentru că, pe măsură ce aceste ştiinţe s-au dezvoltat, am recunoscut mai bine legăturile care le uneau şi am observat atunci un fel de desen general al hărţii ştiinţei universale. Există fapte comune mai multor ştiinţe, care par a fi sursa comună ce se ramifică în toate direcţiile şi care sunt comparabile cu acel nod din Saint-Gothard din care izvorăsc ape ce alimentează patru bazine diferite. Putem atunci să alegem faptele cu mai mult discernământ decât înaintaşii noştri, care priveau aceste bazine ca distincte şi separate de bariere de netrecut.

Trebuie să alegem totdeauna fapte simple, dar printre ele trebuie să le preferăm pe cele situate în noduri de felul celui din Saint-Gothard de care vorbeam.

Şi în cazul în care ştiinţele nu comportă o legătură directă, ele se lúminează încă reciproc prin analogie. Atunci când se studiau legile la care se supun gazele, se ştia că era în joc un fapt de mare randament ; şi totuşi acest randament era încă subevaluat, deoarece gazele constituie, dintr-un anumit punct de vedere, imaginea Căii Lactee, şi pentru că aceste fapte, care nu păreau interesante decât pentru fizician, vor deschide îndată orizonturi noi şi neaşteptate în astronomie.

În sfârşit, atunci când geodezul observă că trebuie să-şi deplaseze luneta cu câteva secunde ca să vizeze un semnal instalat cu mare dificultate, el are de-a face cu un fapt modest ; dar acesta este un fapt de mare randament, nu numai pentru că îi dezvăluie existenţa unei mici ridicături pe geoidul terestru — ridicătură care prin ea însăşi n-ar prezenta un mare interes —, ci şi pentru că această ridicătură îi dă indicaţii despre distribuţia materiei în interiorul globului şi, în consecinţă, despre trecutul planetei noastre, despre viitorul ei, despre legile dezvoltării sale.

Sumar

Introducere 5

CARTEA ÎNTÂI
Savantul şi ştiinţa

Capitolul I. Alegerea faptelor 9
Capitolul II. Viitorul matematicilor 16
Aritmetica 26
Algebra 27
Geometria 27
Cantorismul 29
Cercetarea postulatelor 30
Capitolul III. Invenţia matematică 31
Capitolul IV. Hazardul 44

CARTEA A DOUA
Raţionamentul matematic

Capitolul I. Relativitatea spaţiului 63
Capitolul II. Definiţiile matematice şi învăţământul 80
Capitolul III. Matematicile şi logica 98
Capitolul IV. Logicile noi 110
Capitolul V. Ultimele eforturi ale logisticienilor 123

CARTEA A TREIA
Mecanica nouă

Capitolul I. Mecanica şi radiul 137
1. Introducere 137
2. Masă longitudinală şi masă transversală 140
3. Radiaţiile canal 142
4. Teoria lui Lorentz 143
5. Consecinţe mecanice 145
Capitolul II. Mecanica şi optica 147

1. Aberaţia 147
2. Principiul relativităţii 149
3. Principiul reacţiunii 152
4. Consecinţe ale principiului relativităţii 155
5. Experienţa lui Kaufmann 157
6. Principiul inerţiei 158
7. Unda de acceleraţie 160
Capitolul III. Mecanica nouă şi astronomia 162
1. Gravitaţia 162
2. Comparaţia cu observaţiile astronomice 165
3. Teoria lui Lesage 167
4. Concluzii 171

CARTEA A PATRA
Ştiinţa astronomică

Capitolul I. Calea Lactee şi teoria gazelor 173
Capitolul II. Geodezia franceză 185

Concluzii generale 194

Pentru orice informaţie privind apariţiile
Editurii Ştiinţifice
☎ contactaţi-ne la **tel./fax 222. 333. 0**

Cumpărând direct de la editură
obţineţi o reducere
de **10%**
Pentru comenzi mai mari de 100.000 lei
obţineţi o reducere
de **15%**

Pentru PROVINCIE
putem expedia prin POŞTĂ
orice apariţie a editurii,
costul transportului fiind
suportat de editură.

Adresa noastră este :
Editura Ştiinţifică **Piaţa Presei Libere**
nr. 1, 71341, Bucureşti, 33.

În colecţia
BIBLIOTECA DE FILOSOFIE
au apărut:

1. Thoma de Aquino, **Summa theologiae. Despre Dumnezeu** (seria ***Clasicii filosofiei universale***)
2. Aureliu Augustin, **Despre cetatea lui Dumnezeu** (seria ***Clasicii filosofiei universale***)
3. Bonaventura, **Itinerariul minţii în Dumnezeu** (seria ***Medievalia***)
4. Anselm, **Proslogion** (seria ***Medievalia***)
5. *** **Filosofia neokantiană în texte** (serie ***Filosofia universală contemporană***)
6. W.H. Newton-Smith, **Raţionalitatea ştiinţei** (seria ***Filosofia universală contemporană***)
7. Ferdinand Gonseth, **Filosofia deschisă** (seria ***Filosofia universală contemporană***)

ISBN 973-44-0248-X